

## תרגיל מ"ס 5

1. פתרו את הבעיה

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{tt} - 4u_{xx} = (1-x) \cos(t), & 0 \leq x \leq \pi, \quad t \geq 0 \\ u(x, 0) = \frac{x^2}{2\pi}, & 0 \leq x \leq \pi \\ u_t(x, 0) = \cos(3x), & 0 \leq x \leq \pi \\ u_x(0, t) = \cos(t) - 1, \quad u_x(\pi, t) = \cos(t), & t \geq 0 \end{array} \right.$$

2. יהי  $m$  מספר טבעי ויהי  $\omega \in \mathbb{R}$ .

(א) נניח תחילה כי  $\omega^2 \neq m^2\pi^2$ . פתרו את בעיית הגלים הבאה:

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{tt} - u_{xx} = \sin(m\pi x) \sin(\omega t), & 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0 \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq 1 \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t \geq 0 \end{array} \right.$$

(ב) פתרו את הבעיה עבור  $\omega^2 = m^2\pi^2$ .

(ג) תאר את תופעת התהודה שקיבלת בסעיף ב'.

3. בשאלה זו נדון בבעיית הטלגרף:

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{tt} + u_t - c^2 u_{xx} = 0, & a \leq x \leq b, \quad t \geq 0 \\ u(x, 0) = f(x), & a \leq x \leq b, \\ u_t(x, 0) = g(x), & a \leq x \leq b, \\ u(a, t) = u_x(b, t) = 0, & t \geq 0 \end{array} \right.$$

בהינתן פתרון אמיתי של בעיית הטלגרף  $u(x, t)$ , נגדיר "אינטגרל האנרגיה" באופן הבא:

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_a^b [u_t^2 + c^2 u_x^2] dx$$

(א) הוכח כי  $E(t) \leq 0$  מקיים עבור  $t > 0$ .  
 (ב) בעזרת אינטגרל האנרגיה ותוצאות של סעיף א', הוכיחו את יחידות הפתרון לבעיית הטלגרף.

4. פתרו את הבעיה:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 2t + (9t + 31) \sin\left(\frac{3x}{2}\right), & 0 \leq x \leq \pi, \quad t \geq 0 \\ u(0, t) = t^2, & t \geq 0 \\ u_x(\pi, t) = 1, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = x + 3\pi, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

5. יהי  $\alpha \in \mathbb{R}$  ונתבונן בבעיה הבאה:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} + \alpha u = 0, & 0 \leq x \leq \pi, \quad t \geq 0 \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = x(\pi - x), & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

(א) מצא פתרון לבעיה.  
 (ב) מצא את  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t)$ .

6. יהיו  $u, v$  זוג פתרונות של משוואת החום בתחום  $\{0 \leq x \leq L, 0 \leq t < \infty\}$  כך ש-

$$\begin{cases} u(x, 0) \leq v(x, 0), & 0 \leq x \leq L \\ u(0, t) \leq v(0, t), & 0 \leq t < \infty \\ u(L, t) \leq v(L, t), & 0 \leq t < \infty \end{cases}$$

הוכיחו כי  $u(x, t) \leq v(x, t)$  לכל  $x$  ו- $t$  בתחום. (רמז: השתמשו בעיקרון המקסימום עבור משוואת החום).