<u>אלגברה מופשטת 2 – תרגיל בית 5</u>

מתרגלים: ד"ר אפי כהן ואדם צ'פמן.

1. יהי חוג R יהיו שני אידיאלים $I,J \triangleleft R$ כך ש $I+J=R$. הוכח כי $I\cap J = IJ+JI$.

פיתרון: ההכלה $I\cap J \supseteq IJ+JI$ נכונה לכל שני אידיאלים $I,J \triangleleft R$. נוכיח את ההכלה בכיוון השני. בגלל ש $I+J=R$, $1=i+j$ לאיזשהם $i\in I$ ו $j\in J$. יהי $x\in I\cap J$, אזי $x=x\cdot 1 = x(i+j)=xi+xj\subseteq JI+IJ$.

2. יהי חוג קומוטטיבי R יהיו שני אידיאלים $I,J \triangleleft R$ כך ש $I\cap J$ ראשוני. הוכח כי $J\subseteq I$ או $I\subseteq J$.

פיתרון: נניח כי $J\not\subseteq I$ ו $I\not\subseteq J$, אזי קיימים $i\in I\setminus J$ ו $j\in J\setminus I$. כעת, מתקיים $ij\in I\cap J$, אולם $i,j\notin I\cap J$ ולכן $I\cap J$ איננו ראשוני.

3. אמרו על האידיאלים הבאים מי מהם מקסימלי ומי ראשוני:
   a. $I=\{(0,n):n\in\mathbb{Z}\}\triangleleft \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.
   b. $I=<2x+1>\triangleleft \mathbb{Z}[x]$.

פיתרון: בסעיף א, $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/I\cong\mathbb{Z}$ זהו תחום שלמות (ולא שדה) ולכן האידיאל ראשוני (ולא מקסימלי).

בסעיף ב, $\mathbb{Z}[x]/I\cong\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$. גם שה תחום שלמות שאינו שדה, ולכן האידיאל ראשוני ולא מקסימלי.

4. הוכיחו כי $\mathbb{R}[x]/<x^2-1>\ncong \mathbb{R}[x]/<x^4-1>$.

פיתרון: האידיאלים $I=<x^2-1>, J=<x^2+1>$ הם קו-מקסימליים ב $\mathbb{R}[x]$, ולכן לפי משפט השאריות הסיני $\mathbb{R}[x]/<x^4-1>\cong \mathbb{R}[x]/I\times \mathbb{R}[x]/J$. כלומר $\mathbb{R}[x]/<x^2-1>$ הוא חוג מנה לא טריוויאלי של $\mathbb{R}[x]/<x^4-1>$ ולכן הם אינם איזומורפיים.

5. יהי חוג R עם אידיאל מקסימלי יחיד $M\lhd R$ [מה שנקרא חוג מקומי].
   a. הוכח כי כל איבר שלא נמצא באידיאל הפיך.
   b. יהי $f:R\to S$ אפימורפיזם עבור איזשהו חוג $S\neq 0$. הוכח כי S מקומי.

פיתרון: נניח שקיים איבר לא הפיך $a\notin M$. כעת קיים אידיאל מקסימלי המכיל את a, I [לפי הלמה של צורן]. אבל ישנו רק אידיאל מקסימלי אחד והוא M, ולכן $M=I$, וזו סתירה.

נניח בשלילה כי קיימים שני אידיאלים מקסימליים שונים ב S, I ו J. לפי מה שראינו בכיתה, $f^{-1}(I)$ ו $f^{-1}(J)$ הם מקסימליים, ב R, וזו סתירה ליחידות M.

6. חוג R נקרא ראשוני למחצה אם לא קיים אידיאל $0\neq I\lhd R$ כך ש $I^2=0$.
   אידיאל P בחוג כלשהו R נקרא ראשוני למחצה אם R/P הוא חוג ראשוני למחצה. הוכח כי $P\lhd R$ ראשוני למחצה אם ורק אם לכל $a\in R$, אם $aRa\subseteq P$ אז $a\in P$.

פיתרון: נביט בהעתקה הטבעית $f:R\to R/P$. אם $P\lhd R$ לא ראשוני למחצה אזי R/P לא ראשוני למחצה ולכן קיים $0\neq I\lhd R/P$ כך ש $I^2=0$. ניקח $0\neq b\in I$ אזי קיים מקור ל b, a, ומתקיים $a\notin P$ (בגלל שהתמונה שלו שונה מאפס). אולם, $f(aRa)=bSb\subseteq I^2=0$ ולכן $aRa\subseteq P$.

מצד שני, אם קיים $a \notin P$ כך ש $aRa \subseteq P$, אז נביט ב $b = f(a)$ ובאידיאל $I = <b>$. אזי מתקיים $I^2 = 0$.

7. מצאו a חיובי שלם המקיים $a \equiv 1 \pmod{11}$, $a \equiv 2 \pmod 9$ ו $a \equiv 4 \pmod 5$.

פיתרון: האידיאלים $11\mathbb{Z}, 9\mathbb{Z}, 5\mathbb{Z}$ הם קו-מקסימליים, ולכן יש פיתרון לפי משפט השאריות הסיני. מ $a \equiv 1 \pmod{11}$ מקבלים $a = 1 + 11t$. נציב זאת ב $a \equiv 2 \pmod 9$: $1 + 11t \equiv 2 \pmod 9$, $2t \equiv 1 \pmod 9$, $t \equiv 5 \pmod 9$, ולכן $t = 5 + 9s$, משמע $a = 1 + 11(5 + 9s) = 56 + 99s$. נציב זאת ב $a \equiv 4 \pmod 5$: $56 + 99s \equiv 4 \pmod 5$, $-s \equiv 3 \pmod 5$, ולכן $s \equiv 2 \pmod 5$, משמע $s = 2 + 5r$. לסיום $a = 56 + 99(2 + 5r) = 254 + 495r$.