<u>אלגברה מופשטת 2 – תרגיל בית 6</u>

מתרגלים: ד"ר אפי כהן ואדם צ'פמן.

<u>שאלה 1</u>

הוכיחו כי $\mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2-1\rangle$ לא איזומורפי ל $\mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2\rangle$

<u>שאלה 2</u>

יהי n מספר טבעי ונסמן $S=\{n^k : k=0,1,2,\ldots\}$. נסמן ב $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$ את החוג $S^{-1}\mathbb{Z}$.

א. אם p מספר ראשוני, הוכיחו שאין חוג R המוכל ממש בין $\mathbb{Z}$ ל $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right]$.

ב. מה הם האידיאלים ב $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{7}\right]$?

<u>שאלה 3</u>

יהי R חוג קומוטטיבי עם יחידה. עבור שני אידיאלים I,J של R נגדיר $[I:J]=\{x\in R : xJ\subseteq I\}$.

א. הוכיחו שאם P אידיאל ראשוני ו J לא מוכל ב P אז $[P:J]=P$.

ב. יהי I אידיאל, $a\in R$. הוכיחו כי $[I:\langle a\rangle]\subseteq[I:\langle a^2\rangle]$.

<u>שאלה 4</u>

יהי F שדה. הוכיחו כי $R=\left\{\begin{pmatrix} c & a & b\\ 0 & c & d\\ 0 & 0 & c\end{pmatrix} : a,b,c,d\in F\right\}$ הוא חוג מקומי.

<u>שאלה 5</u>

יהי F שדה. מה הם ההפיכים ב $F[x]/\langle x^n\rangle$?

<u>שאלה 6</u>

נגדיר העתקה $\tau : R\to S^{-1}R$ ע"י $r\to \frac{r}{1}$. ($R, S^{-1}R$ כפי שהגדרנו בשיעור)

א. הראה שאיברי $\tau S=\left\{\frac{s}{1} : s\in S\right\}$ הפיכים ב $S^{-1}R$.

נסמן $S^{-1} := \left\{\frac{1}{s} : s\in S\right\}$, נגדיר את המכפלה של קבוצות $A,B\subseteq R$ ע"י $A\cdot B=\{a_1b_1+\ldots.+a_nb_n : a_i\in A, b_i\in B\}$.

ב. תהיי $A\subseteq S^{-1}R$ תת קבוצה הסגורה לחיבור ולכפל באיברים של τS הראה שהמכפלה בתת קבוצות של $S^{-1}R$ היא קבוצת המכפלות $S^{-1}\cdot A=\left\{\frac{1}{s}\cdot a : s\in S, a\in A\right\}$.

ג. הראה ש $\tau : R\to S^{-1}R$ היא על אם ורק אם כל איברי S הפיכים כבר ב R.