משוואות דיפרנציאליות רגילות 88-240 תרגילים 5-6 (המשך)

5. מצא אופרטורים דיפרנציאליים עם מקדמים קבועים המאפסים את הפונקציות הבאות:

$x^2 e^{x+1}$

את e^x מאפס $D-1$. e קבוע ולכן $D-1$ מאפס גם
את $e\cdot e^x = e^{x+1}$. הכפל ב-x^2 מעיד על כך שנצטרך שהשורש $D=1$
יופיע בריבוי 3. ולכן האופרטור הנדרש הוא $\boxed{(D-1)^3}$

$3\cdot e^{2x}\cos 2x$

כדי לאפס את $e^{\alpha x}\cos\beta x$ (או $e^{\alpha x}\sin\beta x$) נצטרך שלפולינום
האופייני יהיו זוג שורשים מרוכבים צמודים $\alpha\pm i\beta$.
במקרה שלנו $\alpha=2, \beta=2$. כלומר האופרטור $[D-(2+2i)]\cdot[D-(2-2i)]$,
שלאחר פתיחת סוגריים הוא $\boxed{D^2-4D+8}$ מאפס את $e^{2x}\cos 2x$
ולכן גם את $3\cdot e^{2x}\cos 2x$ (הכפל בקבוע 3 לא משנה).

$x(2x+1)\sin x = 2x^2\sin x + x\sin x$

נרצה את זוג השורשים המרוכבים $\pm i$. (כי $\sin x = e^{0\cdot x}\sin(1\cdot x) \Rightarrow \alpha\pm i\beta = \pm i$)
באיזה ריבוי הם יצטרכו להופיע? המחובר $2x^2\sin x$ צריך ריבוי 3
והמחובר $x\sin x$ צריך ריבוי 1. כדי לאפס את הסכום של שניהם
מספיק לקחת ריבוי 3 ואין צורך לקחת ריבוי 4! (כלומר להכפיל
את האופרטורים המאפסים זה בזה) כלומר, האופרטור המשמיד, שנסמנו
L הוא:

$$L = [D-i]^3\cdot[D+i]^3 = [(D-i)(D+i)]^3 = [D^2+1]^3 =$$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}\cdot[D^2]^k\cdot 1^{3-k}}_{\text{הבינום של ניוטון}} = \sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}D^{2k} = \binom{3}{0}D^0+\binom{3}{1}D^2+\binom{3}{2}D^4+\binom{3}{3}D^6 =$$

$$= 1\cdot 1 + 3\cdot D^2 + 3D^4 + 1\cdot D^6 = \boxed{D^6+3D^4+3D^2+1}$$

$3+4x-2e^{-2x}$

את $3+4x$ מאפס D^2 (זהו פולינום ממעלה 1). ואת $-2e^{-2x}$ מאפס
$D-(-2)=D+2$. כדי לאפס את הסכום שלהם נכפול את האופרטורים האלו
זה בזה ונקבל שהאופרטור המאפס ("המשמיד") הוא:

$$A = D^2(D+2) = \boxed{D^3+2D^2}$$

הערה חשובה: באתר www.math-wiki.com תחת הקורס מד"ר ישנה טבלה
של פונקציות והמשמידים שלהן (מומלץ שתזכרו אותה)

6. מצאו את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

$$\underline{\underline{y^{(5)}-10y'''+9y'=0}}$$

משוואה מאפיינת:

$$\lambda^5-10\lambda^3+9\lambda=0$$

$$\lambda\cdot(\lambda^4-10\lambda^2+9)=0$$

קל לראות ש: $\boxed{\lambda_1=0}$ שורש. השאר זו משוואה דו ריבועית.

נסמן $\mu=\lambda^2$

$$\rightarrow \mu^2-10\mu+9=0$$

$$\mu_{1,2}=\frac{10\pm\sqrt{100-36}}{2}=\frac{10\pm\sqrt{64}}{2}=\frac{10\pm 8}{2}=\frac{18}{2},\frac{2}{2}=9,1$$

* $\mu=9 \Rightarrow \lambda^2=9 \Rightarrow \boxed{\lambda_{2,3}=\pm 3}$
* $\mu=1 \Rightarrow \lambda^2=1 \Rightarrow \boxed{\lambda_{4,5}=\pm 1}$

הפתרון הכללי הוא:

$$\boxed{\begin{aligned} y&=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}+C_3e^{\lambda_3 x}+C_4e^{\lambda_4 x}+C_5e^{\lambda_5 x}=\\ &=C_1e^0+C_2e^{3x}+C_3e^{-3x}+C_4e^{-x}+C_5e^{x}=\\ &=C_1+C_2e^{3x}+C_3e^{-3x}+C_4e^{-x}+C_5e^{x}\end{aligned}}$$

שימו לב שבשאלה הזו אין שום "בעיות". לא שורשים מרוכבים ולא שורשים מרובים.

$$\underline{\underline{y'''-y''-y'+y=0}}$$

משוואה אופיינית:

$$\lambda^3-\lambda^2-\lambda+1=0$$

קל לנחש $\boxed{\lambda_1=1}$. נבצע חילוק פולינומים:

$$\begin{array}{r|l} \boxed{\lambda^2-1} & \\ \hline \lambda^3-\lambda^2-\lambda+1 & \lambda-1 \\ -(\lambda^3-\lambda^2) & \\ \hline -\lambda+1 & \\ -(-\lambda+1) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\Longrightarrow \lambda^3-\lambda^2-\lambda+1=(\lambda-1)\cdot(\lambda^2-1)=(\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda+1)$$

$$=(\lambda-1)^2(\lambda+1)$$

בסה״כ יש שורש $\boxed{\text{כפול}}$ $\boxed{\lambda=1}$ ושורש פשוט $\boxed{\lambda=-1}$

ולכן הפתרון הכללי הוא:

$$\boxed{y=C_1e^{1\cdot x}+C_2\cdot x\cdot e^{1\cdot x}+C_3e^{-1\cdot x}=C_1e^{x}+C_2xe^{x}+C_3e^{-x}}$$

בס"ד

6. (המשך)

$$\underline{y^{(5)}-6y^{(4)}+9y'''=0}$$

משוואה מאפיינית:

$$\lambda^5-6\lambda^4+9\lambda^3=0$$

$$\lambda^3\cdot(\lambda^2-6\lambda+9)=0$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_{1,2,3}=0,0,0}$$

נותר לפתור את:

$$\lambda^2-6\lambda+9=0 \Rightarrow \lambda_{4,5}=\frac{6\pm\sqrt{36-36}}{2}=\boxed{3,3}$$

⇐ השורש $\lambda=0$ מופיע בריבוי 3 והשורש $\lambda=3$ מופיע בריבוי 2

$$\Rightarrow \boxed{y=c_1e^{0x}+c_2xe^{0x}+c_3x^2e^{0x}+c_4e^{3x}+c_5xe^{3x}=c_1+c_2x+c_3x^2+c_4e^{3x}+c_5xe^{3x}}$$

$$\underline{y^{(4)}+2y''+y=0}$$

משוואה מאפיינית:

$$\lambda^4+2\lambda^2+1=0$$

$$\mu:=\lambda^2 \Rightarrow \mu^2+2\mu+1=0 \Rightarrow \mu_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4-4}}{2}=-1,-1$$

כלומר $\mu_1=-1 \Rightarrow \lambda^2=-1 \Rightarrow \lambda_{1,2}=\pm i$

וכן $\mu_2=-1 \Rightarrow \lambda^2=-1 \Rightarrow \lambda_{3,4}=\pm i$

השורשים (המרוכבים!) $\pm i$ מופיעים בריבוי 2 כל אחד ולכן הפתרון הוא:

$$\boxed{y=c_1\cos x+c_2\sin x+c_3x\cos x+c_4x\sin x}$$

7. מצא פתרון כללי של המשוואה הבאה:

$$y'''+3y''-y'-3y=x^2+1$$

המשוואה ההומוגנית הקשורה היא:

$$y'''+3y''-y'-3y=0$$

$$(D^3+3D^2-D-3)y=0$$

המשוואה האופיינית היא:

$$\lambda^3+3\lambda^2-\lambda-3=0$$

הלו ניחוש שורש $\boxed{\lambda_1=1}$. נבצע חילוק פולינומים

$$\begin{array}{l}
\boxed{\lambda^2+4\lambda+3}\\
\lambda^3+3\lambda^2-\lambda-3 \;\big|\; \lambda-1\\
-\ \lambda^3-\lambda^2\\
\hline
\quad 4\lambda^2-\lambda-3\\
\quad -\ 4\lambda^2-4\lambda\\
\hline
\qquad 3\lambda-3\\
\qquad -\ 3\lambda-3\\
\hline
\qquad\quad 0
\end{array}$$

$$\Rightarrow \lambda^3+3\lambda^2-\lambda-3=(\lambda-1)(\lambda^2+4\lambda+3)\overset{!}{=}0$$

$$\Rightarrow \lambda_{2,3}=\frac{-4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\frac{-4\pm\sqrt{4}}{2}=\frac{-4\pm2}{2}=\boxed{-1,-3}$$

ולכן פתרון המשוואה ההומוגנית הוא:

$$y_c=c_1e^{x}+c_2e^{-x}+c_3e^{-3x}$$

בס"ד

7. (המשך) נחזור חזרה למשוואה המקורית:

$$(D^3+3D^2-D-3)y = x^2+1$$

$$(D-1)(D+1)(D+3)y = x^2+1 \quad / \; D^3(\cdot)$$

המשמיד של אגף ימין

$$D^3(D-1)(D+1)(D+3)y = D^3(x^2+1) = \boxed{0}$$

כעת מד"ר לינארית $\boxed{\text{הומוגנית}}$ את שורשי המשוואה האופיינית ניתן לראות בקלות

מאגף שמאל: $\lambda_{1,2,3,4,5,6} = 0,0,0,1,-1,-3$

$$\Rightarrow y = c_1 e^{0x} + c_2 x e^{0x} + c_3 x^2 e^{0x} + c_4 e^{x} + c_5 e^{-x} + c_6 e^{-3x}$$

לא חשובים הקבועים חופשיים!

נמצא את $c_{1,2,3}$:

$$y_p = c_1 + c_2 x + c_3 x^2$$

$$y_p' = c_2 + 2c_3 x$$

$$y_p'' = 2c_3$$

$$y_p''' = 0$$

נציב את y_p במד"ר המקורית:

$$y_p''' + 3y_p'' - y_p' - 3y_p = x^2+1$$

$$0 + 6c_3 - c_2 - 2c_3 x - 3c_1 - 3c_2 x - 3c_3 x^2 = x^2+1$$

$$(-3c_3)x^2 + (-2c_3 - 3c_2)x + (6c_3 - c_2 - 3c_1) = 1x^2 + 0x + 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3c_3 = 1 & \Longrightarrow \boxed{c_3 = -\frac{1}{3}} \\ -2c_3 - 3c_2 = 0 & \Longrightarrow \frac{2}{3} - 3c_2 = 0 \Rightarrow 3c_2 = \frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{c_2 = \frac{2}{9}} \\ 6c_3 - c_2 - 3c_1 = 1 & \Longrightarrow -2 - \frac{2}{9} - 1 = 3c_1 \Rightarrow 3c_1 = \frac{-29}{9} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{c_1 = -\frac{29}{27}}$$

ולכן הפתרון הכללי הוא:

$$y = -\frac{29}{27} + \frac{2}{9}x - \frac{1}{3}x^2 + c_4 e^{x} + c_5 e^{-x} + c_6 e^{-3x}$$

אבל ביקשו פתרון פרטי (שבו אין הקבועים חופשיים). ולכן אנו צריכים לבחור הקבועים ספציפיים. (איך שבא לנו) ניקח בשביל הנוחות $c_4 = c_5 = c_6 = 0$ ונקבל פתרון פרטי:

$$\boxed{y_p = -\frac{29}{27} + \frac{2}{9}x - \frac{1}{3}x^2}$$

בס"ד

7 (המשך)

$$\underline{\underline{y''' + 3y'' - y' - 3y = e^{2x}}}$$

על פי המד"ר הקודמת ניתן לרשום:

$$(D-1)(D+1)(D+3)\,y = e^{2x} \quad / (D-2)(\cdot)$$

המשמ' של ימין

$$(D-2)(D-1)(D+1)(D+3)\,y = (D-2)(e^{2x}) = 0$$

קיבלנו שוב מד"ר לינארית הומוגנית. שורשי המשוואה האופיינית שלה הם:

$$\lambda_{1,2,3,4} = 2, 1, -1, -3$$

$$\Rightarrow y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{x} + c_3 e^{-x} + c_4 e^{-3x}$$

צריכים למצוא!

ניקח:

$$y_p = c_1 e^{2x}$$

$$y_p' = 2c_1 e^{2x}$$

$$y_p'' = 4c_1 e^{2x}$$

$$y_p''' = 8c_1 e^{2x}$$

נציב במד"ר המקורית:

$$y_p''' + 3y_p'' - y_p' - 3y_p = e^{2x}$$

$$(8c_1 + 12c_1 - 2c_1 - 3c_1)\,e^{2x} = 1 \cdot e^{2x} \quad / : e^{2x} \neq 0$$

$$15c_1 = 1 \Rightarrow \boxed{c_1 = \frac{1}{15}}$$

ולכן הפתרון הכללי הוא:

$$y = \frac{1}{15} e^{2x} + c_2 e^{x} + c_3 e^{-x} + c_4 e^{-3x}$$

ניקח בלי הגבלת הכלליות $c_2 = c_3 = c_4 = 0$ ונקבל פתרון פרטי:

$$\boxed{y_p = \frac{1}{15} e^{2x}}$$

$$y''' + 3y'' - y' - 3y = \sin x$$

כמו מקודם:

$$(D^3 + 3D^2 - D - 3)\,y = \sin x$$

$$(D-1)(D+1)(D+3)\,y = \sin x \quad / (D^2+1)(\cdot)$$

$$(D^2+1)(D-1)(D+1)(D+3)\,y = (D^2+1)(\sin x) = 0$$

קיבלנו מד"ר לינארית הומוגנית ששורשי המשוואה האופיינית שלה הם:

$$\lambda_{1,2,3,4,5} = i, -i, 1, -1, -3$$

$$\Rightarrow y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + c_3 e^{x} + c_4 e^{-x} + c_5 e^{-3x}$$

צריכים למצוא!

7. (המשך)

ניקח:

$$y_p = c_1\cos x + c_2\sin x$$

$$y_p' = -c_1\sin x + c_2\cos x$$

$$y_p'' = -c_1\cos x - c_2\sin x$$

$$y_p''' = c_1\sin x - c_2\cos x$$

נציב במשוואה המקורית:

$$y_p''' + 3y_p'' - y_p' - 3y_p = \sin x$$

$$c_1\sin x - c_2\cos x - 3c_1\cos x - 3c_2\sin x + c_1\sin x - c_2\cos x - 3c_1\cos x - 3c_2\sin x = \sin x$$

$$\underline{(c_1 - 3c_2 + c_1 - 3c_2)}\sin x + \underline{(-c_2 - 3c_1 - c_2 - 3c_1)}\cos x = \underline{1}\sin x + \underline{0}\cdot\cos x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2c_1 - 6c_2 = 1 \\ -6c_1 - 2c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = -3c_1 \end{cases} \Rightarrow 2c_1 - 6\cdot(-3c_1) = 1 \Rightarrow 20c_1 = 1 \Rightarrow \boxed{c_1 = \frac{1}{20}}$$

$$\boxed{c_2 = \frac{-3}{20}}$$

ולכן הפתרון הכללי הוא:

$$y = \frac{1}{20}\cos x - \frac{3}{20}\sin x + c_3e^{x} + c_4e^{-x} + c_5e^{-3x}$$

נוכל בלי הגבלת הכלליות $c_3 = c_4 = c_5 = 0$ ונקבל פתרון פרטי:

$$\boxed{y_p = \frac{1}{20}\cos x - \frac{3}{20}\sin x}$$

$$\underline{\underline{y''' + 3y'' - y' - 3y = xe^{x}}}$$

$$(D-1)(D+1)(D+3)y = xe^{x} \quad / \ (D-1)^2(\cdot)$$

$$(D-1)^2(D-1)(D+1)(D+3)y = (D-1)^2(xe^{x}) = 0$$

$$(D-1)^3(D+1)(D+3)y = 0$$

שוב, נקבל משוואה הומוגנית. שורשי המשוואה האופיינית הם:

$$\lambda_{1,2,3,4,5} = 1, 1, 1, -1, -3$$

$$\Rightarrow y = c_1e^{x} + c_2xe^{x} + c_3x^2e^{x} + c_4e^{-x} + c_5e^{-3x}$$

3 [illegible]
[illegible]

ד"ו 7) המשך

ניקח:

$$y_p = c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x$$

$$y_p' = c_2 e^x + c_2 x e^x + 2c_3 x e^x + c_3 x^2 e^x$$

$$y_p'' = c_2 e^x + c_2 e^x + c_2 x e^x + 2c_3 e^x + 2c_3 x e^x + 2c_3 x e^x + c_3 x^2 e^x$$

$$y_p''' = 2c_2 e^x + c_2 e^x + c_2 x e^x + 2c_3 e^x + 2c_3 e^x + 2c_3 x e^x + 2c_3 e^x + 2c_3 x e^x + 2c_3 x e^x + c_3 x^2 e^x$$

נציב במד"ר המקורית:

$$y_p''' + 3y_p'' - y_p' - 3y_p = xe^x$$

$$3c_2 e^x + c_2 \cancel{x} e^x + 4c_3 e^x + 4c_3 x e^x + 2c_3 e^x \cancel{+2c_3 x e^x} + \cancel{c_3 x^2 e^x}$$

$$+3\cdot(2c_2 e^x + \cancel{c_2 x e^x} + 2c_3 e^x + 4c_3 x e^x + \cancel{c_3 x^2 e^x})$$

$$-(c_2 e^x + c_2 \cancel{x} e^x \cancel{+2c_3 x e^x} + \cancel{c_3 x^2 e^x})$$

$$-3(\cancel{c_2 x e^x} + \cancel{c_3 x^2 e^x}) =$$

$$= 3c_2 e^x + 4c_3 e^x + 4c_3 x e^x + 2c_3 e^x + 6c_2 e^x + 6c_3 e^x + 12c_3 x e^x - c_2 e^x \overset{!}{=} xe^x$$

$$(8c_2 + 12c_3)e^x + (16c_3)xe^x = xe^x \quad /: e^x \neq 0$$

$$\underline{(8c_2 + 12c_3)} + \underline{(16c_3)}x = \underline{1}x + \underline{0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 16c_3 = 1 \Rightarrow \boxed{c_3 = \frac{1}{16}} \\ 8c_2 + 12c_3 = 0 \Rightarrow 8c_2 = -12c_3 = -12 \cdot \frac{1}{16} = -\frac{3}{4} \Rightarrow \boxed{c_2 = -\frac{3}{32}} \end{cases}$$

ולכן הפתרון הכללי הוא:

$$y = c_1 e^x - \frac{3}{32} xe^x + \frac{1}{16} x^2 e^x + c_4 e^{-x} + c_5 e^{-3x}$$

ניקח בלי הגבלת הכלליות $c_1 = c_4 = c_5 = 0$ ונקבל:

$$\boxed{y_p = -\frac{3}{32} xe^x + \frac{1}{16} x^2 e^x}$$

5"7

8. (א) מצא את הפתרון הכללי של המשוואה: $y'' + \Omega^2 y = F\cos\Omega x$

כאשר F, Ω הם קבועים, $\Omega > 0$.

<u>פתרון:</u> המאפס של אגף ימין הוא $D^2+\Omega^2$ נפעיל אותו על שני אגפי המשוואה:

$$(D^2+\Omega^2)(y''+\Omega^2 y) = 0$$

$$(D^2+\Omega^2)(D^2+\Omega^2)y = 0$$

שורשי המשוואה האופיינית הם $\pm i\Omega$! $\pm i\Omega$ (מהמאפס!)

$$\Rightarrow y = C_1\cos\Omega x + C_2\sin\Omega x + C_3 x\cos\Omega x + C_4 x\sin\Omega x$$

צריכים למצוא!

נציב:

$$y_p = C_3 x\cos\Omega x + C_4 x\sin\Omega x$$

$$y_p' = C_3\cos\Omega x + C_3 x\cdot(-\sin\Omega x)\cdot\Omega + C_4\sin\Omega x + C_4\cdot\Omega\cdot x\cos\Omega x$$

$$y_p'' = -\Omega C_3\sin\Omega x - \Omega C_3\sin\Omega x - \Omega^2 C_3 x\cos\Omega x + C_4\Omega\cos\Omega x + C_4\Omega\cos\Omega x - C_4\Omega^2 x\sin\Omega x$$

נציב במד"ר המקורית:

$$y_p'' + \Omega^2 y_p = F\cos\Omega x$$

$$-2\Omega C_3\sin\Omega x + 2\Omega C_4\cos\Omega x - \cancel{\Omega^2 C_3 x\cos\Omega x} - \cancel{\Omega^2 C_4 x\sin\Omega x} + \cancel{\Omega^2 C_3 x\cos\Omega x} + \cancel{\Omega^2 C_4 x\sin\Omega x}$$

$$= (2\Omega C_4)\cos\Omega x + (-2\Omega C_3)\sin\Omega x = F\cos\Omega x + 0\cdot\sin\Omega x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\Omega C_4 = F \Rightarrow \boxed{C_4 = \dfrac{F}{2\Omega}} \\ -2\Omega C_3 = 0 \xrightarrow[\text{ב- } \Omega\neq 0]{\text{נחלק}} -2C_3 = 0 \Rightarrow \boxed{C_3 = 0} \end{cases}$$

הפתרון הוא:

$$\boxed{y = C_1\cos\Omega x + C_2\sin\Omega x + \frac{F}{2\Omega} x\sin\Omega x}$$

8.(ב) מצא את הפתרון הכללי של המשוואה: $y''+2ky'+\Omega^2 y=F\cos\Omega x$

כאשר F,Ω הם קבועים $\Omega>0$! k - הוא מספר חיובי קטן.

פתרון: נפעיל את אותו המשמיד: $D^2+\Omega^2$

$$(D^2+\Omega^2)(y''+2ky'+\Omega^2 y)=0$$

$$(D^2+\Omega^2)(D^2+2kD+\Omega^2)\,y=0$$

$$\lambda_{1,2}=\pm i\Omega \qquad \lambda_{3,4}=\frac{-2k\pm\sqrt{4k^2-4\Omega^2}}{2}=\frac{-2k\pm 2\sqrt{k^2-\Omega^2}}{2}=$$

$$=-k\pm\underbrace{\sqrt{k^2-\Omega^2}}_{\text{שלילי כי } k \text{ קטן}}=-k\pm i\sqrt{\Omega^2-k^2}$$

$$\Rightarrow y=c_1\cos\Omega x+c_2\sin\Omega x+c_3e^{-kx}\cos(\sqrt{\Omega^2-k^2}\,x)+c_4e^{-kx}\sin(\sqrt{\Omega^2-k^2}\,x)$$

צריכים למצוא.

נחש:

$$y_p=c_1\cdot\cos\Omega x+c_2\cdot\sin\Omega x$$

$$y_p'=-\Omega c_1\sin\Omega x+\Omega c_2\cos\Omega x$$

$$y_p''=-\Omega^2 c_1\cos\Omega x-\Omega^2 C_2\cos\Omega x=-\Omega^2\cdot y_p$$

נציב במד"ר:

$$\cancel{y_p''}+2ky_p'+\cancel{\Omega^2 y_p}=F\cos\Omega x$$

$$-\Omega 2kc_1\sin\Omega x+2kc_2\cdot\Omega\cos\Omega x=F\cos\Omega x$$

$$(2kc_2\Omega)\cos\Omega x+(-2kc_1\Omega)\sin(\Omega x)=F\cos\Omega x+0\cdot\sin\Omega x$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2kc_2\Omega=F & \Rightarrow \boxed{c_2=\frac{F}{2k\Omega}}\\ -2kc_1\Omega=0 & \Rightarrow \boxed{c_1=0}\end{cases}$$

ולכן הפתרון הוא:

$$\boxed{y=c_3e^{-kx}\cos(\sqrt{\Omega^2-k^2}\,x)+c_4e^{-kx}\sin(\sqrt{\Omega^2-k^2}\,x)+\frac{F}{2k\Omega}\sin\Omega x}$$

בס״ד

8. (ג) הוכח שניתן לקבל את התשובה של סעיף א על ידי חישוב הגבול כאשר $k\to 0$ של התשובה של סעיף ב.

<u>פתרון</u>: פתרון סעיף ב הוא:

$$y = c_3 e^{-kx}\cos\left(\sqrt{\Omega^2-k^2}\,x\right) + c_4 e^{-kx}\sin\left(\sqrt{\Omega^2-k^2}\,x\right) + \frac{F}{2k\Omega}\sin\Omega x$$

אפשר להציג ולראות שמתקיים:

$$\boxed{y(0) = c_3}$$

$$y'(x) = c_3(-k)e^{-kx}\cos\left(\sqrt{\Omega^2-k^2}\,x\right) + c_3 e^{-kx}\left(-\sin\left(\sqrt{\Omega^2-k^2}\,x\right)\right)\cdot\sqrt{\Omega^2-k^2}$$

$$+ c_4\cdot(-k)e^{-kx}\sin\left(\sqrt{\Omega^2-k^2}\,x\right) + c_4 e^{-kx}\cos\left(\sqrt{\Omega^2-k^2}\,x\right)\sqrt{\Omega^2-k^2} + \frac{F}{2k}\cos\Omega x$$

$$y'(0) = -kc_3 + 0 + 0 + c_4\cdot\sqrt{\Omega^2-k^2} + \frac{F}{2k}$$

$$y'(0) = -ky(0) + c_4\sqrt{\Omega^2-k^2} + \frac{F}{2k}$$

$$c_4\sqrt{\Omega^2-k^2} = y'(0) + ky(0) - \frac{F}{2k} \Longrightarrow c_4 = \frac{y'(0)+ky(0)-\frac{F}{2k}}{\sqrt{\Omega^2-k^2}}$$

$$\Rightarrow y = y(0)e^{-kx}\cos\left(\sqrt{\Omega^2-k^2}\,x\right) + \left(\frac{y'(0)+ky(0)-\frac{F}{2k}}{\sqrt{\Omega^2-k^2}}\right)e^{-kx}\sin\left(\sqrt{\Omega^2-k^2}\,x\right) + \frac{F}{2k\Omega}\sin\Omega x =$$

$$= \underbrace{y(0)e^{-kx}\cos\left(\sqrt{\Omega^2-k^2}\,x\right)}_{\downarrow k\to 0} + \underbrace{\frac{y'(0)+ky(0)}{\sqrt{\Omega^2-k^2}}e^{-kx}\sin\left(\sqrt{\Omega^2-k^2}\,x\right)}_{\downarrow k\to 0} + \underbrace{\frac{F}{2}\left(\frac{\sin\Omega x}{k\Omega} - \frac{e^{-kx}\sin\left(\sqrt{\Omega^2-k^2}\,x\right)}{k\sqrt{\Omega^2-k^2}}\right)}_{(*)}$$

$$y(0)\cos\left(\sqrt{\Omega^2}\,x\right) = y(0)\cos(\Omega x) = \text{"}c_1\text{"}\cos(\Omega x)$$

$$\frac{y'(0)}{\Omega}\sin\Omega x = \text{"}c_2\text{"}\sin\Omega x$$

אם נראה: $\lim\limits_{k\to 0}(*) = \frac{F}{2\Omega}\cdot x\cdot\sin\Omega x$ סיימנו.

$$\lim_{k\to 0}\frac{F}{2}\left(\frac{\sin\Omega x}{k\Omega} - \frac{e^{-kx}\sin\left(\sqrt{\Omega^2-k^2}\,x\right)}{k\sqrt{\Omega^2-k^2}}\right) = \frac{F}{2}\lim_{k\to 0}\left(\frac{\sqrt{\Omega^2-k^2}\sin\Omega x - \Omega e^{-kx}\sin\left(\sqrt{\Omega^2-k^2}\,x\right)}{k\Omega\sqrt{\Omega^2-k^2}}\right) =$$

$$\underset{\text{לופיטל}}{=} \frac{F}{2}\cdot\lim_{k\to 0}\frac{\frac{d}{dk}\left[\sqrt{\Omega^2-k^2}\sin\Omega x - \Omega e^{-kx}\sin\left(\sqrt{\Omega^2-k^2}\,x\right)\right]}{\frac{d}{dk}\left[k\Omega\sqrt{\Omega^2-k^2}\right]} =$$

8. ג) (המשך)

$$= \frac{F}{2}\cdot\lim_{k\to 0}\frac{\frac{-k}{\sqrt{\Omega^2-k^2}}\sin\Omega x + x\Omega e^{-kx}\sin\left(\sqrt{\Omega^2-k^2}\,x\right) - \Omega e^{-kx}\cdot\cos\left(\sqrt{\Omega^2-k^2}\,x\right)\cdot\frac{-kx}{\sqrt{\Omega^2-k^2}}}{\Omega\cdot\sqrt{\Omega^2-k^2} + k\Omega\cdot\frac{-k}{\sqrt{\Omega^2-k^2}}} =$$

$$= \frac{F}{2}\cdot\frac{0 + x\Omega\sin(\Omega x) - 0}{\Omega\cdot\Omega + 0} = \frac{F}{2}\cdot\frac{x\Omega\sin\Omega x}{\Omega^2} = \frac{F}{2\Omega}\cdot x\sin\Omega x$$

מש"ל