תרגיל 7 אינפי 3

1. ראשית נחשב את הנגזרות החלקיות עד סדר 3:

$$f_x = e^x \cos y, \quad f_y = -e^x \sin y$$

$$f_{xx} = e^x \cos y, \quad f_{xy} = -e^x \sin y, \quad f_{yy} = -e^x \cos y$$

$$f_{xxx} = e^x \cos y, \quad f_{xxy} = -e^x \sin y, \quad f_{xyy} = -e^x cosy, \quad f_{yyy} = e^x \sin y$$

עבור הנקודה $(0,0)$, הנגזרות הן:

$$f_{xxx}(0,0) = 1, \quad f_{xxy}(0,0) = 0, \quad f_{xyy}(0,0) = -1, \quad f_{yyy}(0,0) = 0$$

הנוסחא לדיפרנציאל היא:

$$\frac{3!}{3!0!} f_{xxx}(0,0)h_1^3 + \frac{3!}{2!1!} f_{xxy}(0,0)h_1^2 h_2 + \frac{3!}{1!2!} f_{xyy}(0,0)h_1 h_2^2 + \frac{3!}{0!3!} f_{yyy}(0,0)h_2^3$$

לכן הדיפרנציאל בנקודה $(0,0)$ הוא:

$$h_1^3 - 2h_1 h_2^2$$

הערה: יש כאלה שמסמנים dx, dy או $\Delta x, \Delta y$ במקום h_1, h_2. כעת עבור הנקודה $(0, \frac{\pi}{2})$ נקבל כי

$$f_{xxx}(0, \frac{\pi}{2}) = 0, \quad f_{xxy}(0, \frac{\pi}{2}) = -1, \quad f_{xyy}(0, \frac{\pi}{2}) = 0, \quad f_{yyy}(0, \frac{\pi}{2}) = 1$$

לכן הדיפרנציאל בנקודה $(0, \frac{\pi}{2})$ הוא:

$$-2h_1^2 h_2 + h_2^3$$

2. לפי הנוסחא לדיפרנציאל

$$d^k_{(0,0)} f(x,y) = \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 = k} \frac{k!}{\alpha_1! \alpha_2!} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2}}(0,0) x^{\alpha_1} y^{\alpha_2}$$

במקרה שלנו

$$f_x(x,y) = g'(x+y), \quad f_y(x,y) = g'(x+y)$$

ולכן

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2}}(x,y) = g^{(k)}(x+y)$$

כלומר

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^{\alpha_1}\partial y^{\alpha_2}}(0,0)=g^{(k)}(0)$$

נציב זאת בנוסחא של הדיפרנציאל ונקבל

$$d^k_{(0,0)}f(x,y)=\sum_{\alpha_1+\alpha_2=k}\frac{k!}{\alpha_1!\alpha_2!}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x^{\alpha_1}\partial y^{\alpha_2}}(0,0)x^{\alpha_1}y^{\alpha_2}=$$
$$=\sum_{\alpha_1+\alpha_2=k}\frac{k!}{\alpha_1!\alpha_2!}\cdot g^{(k)}(0)x^{\alpha_1}y^{\alpha_2}=g^{(k)}(0)\sum_{\alpha_1+\alpha_2=k}\frac{k!}{\alpha_1!\alpha_2!}\cdot x^{\alpha_1}y^{\alpha_2}$$

וזה שווה לפי הבינום של ניוטון ל

$$g^{(k)}(0)(x+y)^k$$

3. נחשב את כל הנגזרות החלקיות מסדר 0 ועד סדר 3, בנגזרות עד סדר 2 נציב את הנקודה $(1,0)$ בנגזרות מסדר 3 (שהן ישמשו לשארית לגרנז') - נציב את $(1+\theta(x-1),\theta y)$

$$f_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad f_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$f_{xx}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}-\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}=\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},\quad f_{xy}=-\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},\quad f_{yy}=\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

נחשב קודם את הפולינום עד סדר 2, נציב בנגזרות שחישבנו את הנקודה $(1,0)$:

$$f(1,0)=1,\quad f_x(1,0)=1,\quad f_y(1,0)=0$$

$$f_{xx}(1,0)=0,\quad f_{xy}(1,0)=0,\quad f_{yy}(0,0)=1$$

לכן פולינום טיילור (בלי שארית) עד סדר 2 סביב $(1,0)$ הוא:

$$f(x,y)=1+(x-1)+\frac{1}{2}y^2$$

בשביל שארית לגרנז' נחשב את הנגזרות מסדר 3

$$f_{xxx}=-3\frac{xy^2}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}},\quad f_{xxy}=\frac{2y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}-3\frac{y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$f_{xyy}=\frac{2x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}-3\frac{x^3}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}},\quad f_{yyy}=-3\frac{x^2y}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}$$

נסמן

$$\theta_x=1+\theta(x-1),\quad \theta_y=\theta y$$

ונקבל ששארית לגרנז' היא:

$$\frac{1}{3!}(-3\frac{\theta_x\theta_y^2}{(\theta_x^2+\theta_y^2)^{\frac{5}{2}}}(x-1)^3+3\cdot(\frac{2\theta_y}{(\theta_x^2+\theta_y^2)^{\frac{3}{2}}}-3\frac{\theta_y^3}{(\theta_x^2+\theta_y^2)^{\frac{5}{2}}})(x-1)^2y+$$
$$+3\cdot(\frac{2\theta_x}{(\theta_x^2+\theta_y^2)^{\frac{3}{2}}}-3\frac{\theta_x^3}{(\theta_x^2+\theta_y^2)^{\frac{5}{2}}})(x-1)y^2-3\frac{\theta_x^2\theta_y}{(\theta_x^2+\theta_y^2)^{\frac{5}{2}}}y^3)$$

לכן הפולינום כולו עם השארית הוא:

$$f(x,y)=1+(x-1)+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}(-\frac{\theta_x\theta_y^2}{(\theta_x^2+\theta_y^2)^{\frac{5}{2}}}(x-1)^3+(\frac{2\theta_y}{(\theta_x^2+\theta_y^2)^{\frac{3}{2}}}-3\frac{\theta_y^3}{(\theta_x^2+\theta_y^2)^{\frac{5}{2}}})(x-1)^2y$$
$$+(\frac{2\theta_x}{(\theta_x^2+\theta_y^2)^{\frac{3}{2}}}-3\frac{\theta_x^3}{(\theta_x^2+\theta_y^2)^{\frac{5}{2}}})(x-1)y^2-\frac{\theta_x^2\theta_y}{(\theta_x^2+\theta_y^2)^{\frac{5}{2}}}y^3)$$

4. היות ו

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

נקבל כי

$$e^{x^2}=1+x^2+\frac{x^4}{2}+o(x^5)$$

בדומה:

$$\sin 2y=2y-\frac{(2y)^3}{3!}+\frac{(2y)^5}{5!}+o(y^5)$$

ולכן:

$$e^{x^2}sin(2y)=(1+x^2+\frac{x^4}{2}+o(|x|^5))(2y-\frac{(2y)^3}{3!}+\frac{(2y)^5}{5!}+o(|y|^5))=$$
$$2y+2x^2y+x^4y-\frac{4}{3}y^3-\frac{4}{3}x^2y^3+\frac{(2y)^5}{5!}+o(||(x,y)||^5)$$

5. נחשב טור טיילור עד סדר 3 סביב (a,b):

$$f_x=3x^2+y,\quad f_y=x+2y$$

$$f_{xx}=6x,\quad f_{xy}=1,\quad f_{yy}=2$$

$$f_{xxx}=6,\quad f_{xxy}=f_{xyy}=f_{yyy}=0$$

נציב את (a,b) ונקבל:

$$f(a,b) = a^3 + ab + b^2$$

$$f_x(a,b) = 3a^2 + b, \quad f_y(a,b) = a + 2b$$

$$f_{xx}(a,b) = 6a, \quad f_{xy}(a,b) = 1, \quad f_{yy}(a,b) = 2$$

$$f_{xxx}(a,b) = 6, \quad f_{xxy}(a,b) = f_{xyy}(a,b) = f_{yyy}(a,b) = 0$$

ולכן טור טיילור הוא

$$a^3 + ab + b^2 + (3a^2 + b)(x - a) + (a + 2b)(y - b) + \frac{1}{2}(6a(x - a)^2 + 2(x - a)(y - b) + 2(y - b)^2) + \\ + \frac{1}{3!}(6(x - a)^3)$$

שזה בכתיבה קצת יותר יפה:

$$a^3+ab+b^2+(3a^2+b)(x-a)+(a+2b)(y-b)+3a(x-a)^2+(x-a)(y-b)+(y-b)^2+(x-a)^3$$

6. נחשב נגזרות עד סדר 2:

$$f_x = \cos(xe^y)e^y, \quad f_y = \cos(xe^y)xe^y$$

$$f_{xx} = -e^{2y}\sin(xe^y), \quad f_{xy} = -\sin(xe^y)xe^{2y} + \cos(xe^y)e^y, \quad f_{yy} = xe^y\cos(xe^y) - \sin(xe^y)x^2e^{2y}$$

נציב את הנקודה $(\frac{\pi}{2}, 0)$ ונקבל:

$$f(\frac{\pi}{2}, 0) = 1$$

$$f_x(\frac{\pi}{2}, 0) = 0, \quad f_y(\frac{\pi}{2}, 0) = 0$$

$$f_{xx}(\frac{\pi}{2}, 0) = -1, \quad f_{xy}(\frac{\pi}{2}, 0) = -\frac{\pi}{2}, \quad f_{yy}(\frac{\pi}{2}, 0) = -\frac{\pi^2}{4}$$

לכן הפולינום עד סדר 2 עם שארית פיאנו הוא:

$$f(x,y) = 1 + \frac{1}{2}(-(x - \frac{\pi}{2})^2 - \frac{\pi}{2}(x - \frac{\pi}{2})y - \frac{\pi^2}{4}y^2) + o(||(x,y)||^2)$$

7.

(א) היות ו

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

נקבל ש

$$e^{x^2y^3} = 1 + x^2y^3 + \frac{x^4y^6}{2} + \frac{x^6y^9}{6} + o(||x,y||^{19})$$

(נשים לב ש x^8y^{12} הוא כבר איבר ממעלה 20).

(ב) היות ואין בפיתוח טיילור אף איבר מסדר 19 ברור ש

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x^8 \partial^{11}} = 0$$

אינפי 3 תרגיל 8־פתרונות

שאלה 1

סעיף א

$$f(x,y)=x^3+y^3+3x^2-6y^2$$

נחשב גרדיאנט ונקבל

$$\nabla f=(3x^2+6x,3y^2-12y)$$

הגרדיאנט מתאפס כאשר

$$3x^2+6x\Rightarrow x=0\vee x=-2$$

$$3y^2-12y=0\Rightarrow y=0\vee y=4$$

לכן הנקודות הקריטיות הן

$$(0,0),\quad (0,4),\quad (-2,0),\quad (-2,4)$$

נחשב את מטריצת ההסיאן.

$$H_{(x,y)}=\begin{pmatrix}6x+6 & 0\\ 0 & 6y-12\end{pmatrix}$$

נבדוק את המטריצה עבור כל נקודה

$$H_{(0,0)}=\begin{pmatrix}6 & 0\\ 0 & -12\end{pmatrix}$$

הערכים העצמיים הם $6,-12$ ולכן המטריצה מעורבת וזו נקודת אוכף.

$$H_{(0,4)}=\begin{pmatrix}6 & 0\\ 0 & 12\end{pmatrix}$$

הערכים העצמיים הם $6,12$ ולכן זו מטריצה חיובית לחלוטין והנקודה היא נקודת מינימום.

$$H_{(-2,0)}=\begin{pmatrix}-6 & 0\\ 0 & -12\end{pmatrix}$$

הערכים העצמיים הם $-6,-12$ ולכן זו מטריצה שלילית לחלוטין וזו נקודת מקסימום.

$$H_{(-2,4)}=\begin{pmatrix}-6 & 0\\ 0 & 12\end{pmatrix}$$

הערכים העצמיים הם $-6,12$ ולכן זו מטריצה מעורבת וזו נקודת אוכף.

סעיף ב

$$f(x,y)=(x-1)^2-2y^2$$

הגרדיאנט הוא:

$$\nabla f=(2(x-1),-4y)$$

הוא שווה לאפס רק בנקודה

$$(1,0)$$

מטריצת ההסיאן היא

$$H_{(x,y)}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -4\end{pmatrix}$$

בפרט

$$H_{(1,0)}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -4\end{pmatrix}$$

הערכים העצמיים הם $2,-4$ ולכן זו מטריצה מעורבת והנקודה היא נקודת אוכף.

סעיף ג

$$f(x,y)=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$$

$$\nabla f=(4x^3-4x+4y,4y^3-4y+4x)$$

כלומר נקבל מערכת משוואות:

$$\begin{aligned}x^3-x+y=0\\ y^3-y+x=0\end{aligned}$$

נסכום את שתי המשוואות ונקבל

$$x^3+y^3=0$$

ולכן $x=-y$. נציב זאת במשוואה הראשונה ונקבל

$$x^3-2x=0$$

שזה מתקיים כאשר $x=0$ או כאשר $x=\pm\sqrt{2}$. לכן הנקודות הקריטיות הן

$$(0,0),\quad (\sqrt{2},-\sqrt{2}),\quad (-\sqrt{2},\sqrt{2})$$

מטריצת ההסיאן היא:

$$H_{(x,y)}=\begin{pmatrix}12x^2-4 & 4\\ 4 & 12y^2-4\end{pmatrix}$$

עבור

$$H_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$

שזו מטריצה לא הפיכה ולכן לא ניתן לקבוע מההסיאן אם הנקודה היא מינימום, מקסימום או אוכף.

$$H_{(\sqrt{2},-\sqrt{2})} = H_{(-\sqrt{2},\sqrt{2})} = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$$

בעזרת קריטריון סילבסטר נראה ש $20 > 0$ ו הדטרמיננטה היא $400 - 16 > 0$ ולכן המטריצה היא חיובית לחלוטין ולכן אלה נקודות מינימום.

כדי לבדוק את $(0,0)$ נשתמש בדרכים אחרות.

נשים לב ש

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2 = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$$

אם נתקדם לאורך $x = y$ נקבל ש

$$f(x,x) = x^4 + x^4 \geq 0$$

ולכן $(0,0)$ היא לא נקודת מקסימום.

מצד שני, אם נתקדם לאורך $y = 0$ נקבל

$$f(x,0) = x^4 - 2x^2$$

אם נחקור פונקציה זו נקבל

$$f' = 4x^3 - 4x$$

$$f'' = 12x^2 - 4$$

בנקודה $x = 0$ נקבל

$$f''(0) = -4 < 0$$

ולכן $x = 0$ היא מקסימום לאורך הישר $y = 0$. ולכן היא לא מינימום, לכן קיבלנו ש $(0,0)$ היא נקודת אוכף.

סעיף ד

$$f(x,y) = xy\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \quad (a, b > 0)$$

נחשב את הגרדיאנט

$$f_x = y\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} + xy\frac{-2\frac{x}{a^2}}{2\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} = \frac{y(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}) - \frac{x^2y}{a^2}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} = \frac{y - 2\frac{x^2y}{a^2} - \frac{y^3}{b^2}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}$$

באופן דומה

$$f_y = \frac{x - \frac{x^3}{a^2} - 2\frac{y^2 x}{b^2}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}$$

לכן צריך לבדוק מתי

$$\frac{y - 2\frac{x^2 y}{a^2} - \frac{y^3}{b^2}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} = 0, \quad \frac{x - \frac{x^3}{a^2} - 2\frac{y^2 x}{b^2}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} = 0$$

כלומר

$$y - 2\frac{x^2 y}{a^2} - \frac{y^3}{b^2} = 0, \quad x - \frac{x^3}{a^2} - 2\frac{y^2 x}{b^2} = 0$$

ראשיתת נניח ש $y \neq 0, \quad x \neq 0$ ואז ניתן לחלק ב y במשוואה הראשונה וב x במשוואה השניה. ולקבל

$$1 - 2\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}, \quad 1 - \frac{x^2}{a^2} - 2\frac{y^2}{b^2} = 0$$

כלומר

$$2\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 = \frac{x^2}{a^2} - 2\frac{y^2}{b^2}$$

ולכן

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2}$$

ולכן

$$x = \pm\frac{ay}{b}$$

נציב זאת במשוואה

$$1 - \frac{x^2}{a^2} - 2\frac{y^2}{b^2} = 0$$

ונקבל

$$1 - \frac{y^2}{b^2} - 2\frac{y^2}{b^2} = 0$$

כלומר

$$y^2 = \frac{b^2}{3}$$

ולכן

$$y = \pm\frac{b}{\sqrt{3}}$$

כלומר, אם לא מסתכלים על הצירים (כי הנחנו ש $x,y \neq 0$) הנקודות הקריטיות הן

$$(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}}),\quad (\frac{a}{\sqrt{3}},-\frac{b}{\sqrt{3}}),\quad (-\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}}),\quad (-\frac{a}{\sqrt{3}},-\frac{b}{\sqrt{3}})$$

כעת נבדוק מה קורה על הצירים. ברור ש $(0,0)$ היא נקודה קריטית. אם $x=0$ אבל $y \neq 0$ נקבל

$$y - 2\frac{x^2y}{a^2} - \frac{y^3}{b^2} = 0 \Rightarrow y - \frac{y^3}{b^2} = 0 \Rightarrow 1 = \frac{y^2}{b^2} \Rightarrow y = \pm b$$

באופן דומה אם $y=0$ ו $x \neq 0$ נקבל נקודות קריטיות כאשר $x = \pm a$. אבל $(a,0),\quad (-a,0),\quad (0,b),\quad (0,-b)$ נמצאים מחוץ לתחום שאנחנו בודקים ולכן נזרוק אותן. לסיכום: כלל הנקודות הקריטיות הן

$$(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}}),\quad (\frac{a}{\sqrt{3}},-\frac{b}{\sqrt{3}}),\quad (-\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}}),\quad (-\frac{a}{\sqrt{3}},-\frac{b}{\sqrt{3}}),\quad (0,0)$$

ראשית נבדוק את הנקודה $(0,0)$. ברור ש $\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} > 0$ בסביבת הנקודה בכל התחום שלנו. לכן אם נתקדם לאורך $x=y$ נקבל

$$f(x,x) = x^2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} > 0$$

ואם נתקדם לאורך $x=-y$ נקבל

$$f(x,-x) = -x^2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} < 0$$

אבל $f(0,0)=0$ ולכן זו נקודת אוכף.
כדי לסווג את שאר הנקודות, נסתמך על התובנות הבאות:

- אם $f(x_0) > 0$ אז x_0 מקסימום מקומי של f אם ורק אם הוא מקסימום מקומי של f^2.
- אם $f(x_0) > 0$ אז x_0 מינימום מקומי של f אם ורק אם הוא מינימום מקומי של f^2.
- אם $f(x_0) < 0$ אז x_0 מקסימום מקומי של f אם ורק אם הוא מינימום מקומי של f^2.
- אם $f(x_0) < 0$ אז x_0 מינימום מקומי של f אם ורק אם הוא מקסימום מקומי של f^2.

לכן נחקור את

$$f^2(x,y) = x^2y^2(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}) = x^2y^2 - \frac{x^4y^2}{a^2} - \frac{x^2y^4}{b^2}$$

נגזרות מסדר ראשון

$$f_x = 2xy^2 - 4\frac{x^3y^2}{a^2} - 2\frac{xy^4}{b^2}, \quad f_y = 2x^2y - 2\frac{x^4y}{a^2} - 4\frac{x^2y^3}{b^2}$$

ולכן הנגזרות מסדר שני הן:

$$f_{xx} = 2y^2 - 12\frac{x^2y^2}{a^2} - 2\frac{y^4}{b^2}, \quad f_{xy} = 4xy - 8\frac{x^3y}{a^2} - 8\frac{xy^3}{b^2}, \quad f_{yy} = 2x^2 - 2\frac{x^4}{a^2} - 12\frac{x^2y^2}{b^2}$$

ולכן ההסיאן היא:

$$H_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 2y^2 - 12\frac{x^2y^2}{a^2} - 2\frac{y^4}{b^2} & 4xy - 8\frac{x^3y}{a^2} - 8\frac{xy^3}{b^2} \\ 4xy - 8\frac{x^3y}{a^2} - 8\frac{xy^3}{b^2} & 2x^2 - 2\frac{x^4}{a^2} - 12\frac{x^2y^2}{b^2} \end{pmatrix}$$

נבדוק כל נקודה קריטית בנפרד

$$H_{(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}})} = \begin{pmatrix} \frac{2b^2}{3} - \frac{4b^2}{3} - \frac{2b^2}{9} & \frac{4ab}{3} - \frac{8ab}{9} - \frac{8ab}{9} \\ \frac{4ab}{3} - \frac{8ab}{9} - \frac{8ab}{9} & \frac{2a^2}{3} - \frac{4a^2}{3} - \frac{2a^2}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{8b^2}{9} & -\frac{4ab}{9} \\ -\frac{4ab}{9} & -\frac{8a^2}{9} \end{pmatrix}$$

המינור הראשון הוא $-\frac{8b^2}{9} < 0$ והמינור השני הוא הדטרמיננטה שהיא $\frac{64a^2b^2}{81} - \frac{16a^2b^2}{81} = \frac{48a^2b^2}{81} > 0$ לכן זוהי מטריצה שלילית לחלוטין וזו נקודת מקסימום של f^2.

קל לראות שנקבל אותו מינור ראשון ואותה דטרמיננטה עבור כל אחת מהנקודות הקריטיות ולכן הן כולן מקסימום של f^2.

כעת, נשים לב ש $f(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}}), f(-\frac{a}{\sqrt{3}},-\frac{b}{\sqrt{3}}) > 0$ ולכן נקודות אלה הן מקסימום גם של f ואילו $f(-\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}}), f(\frac{a}{\sqrt{3}},-\frac{b}{\sqrt{3}}) < 0$ ולכן נקודות אלה הן מינימום של f.

סעיף ה

$$f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$$

נמצא נגזרות חלקיות

$$f_x(x,y) = 2xe^{-(x^2+y^2)} + (x^2+y^2)(-2x)e^{-(x^2+y^2)}$$

באופן דומה

$$f_y(x,y) = 2ye^{-(x^2+y^2)} + (x^2+y^2)(-2y)e^{-(x^2+y^2)}$$

כלומר נקבל משוואות

$$2x - 2x(x^2+y^2) = 0$$

$$2y - 2y(x^2 + y^2) = 0$$

אם $x \neq 0$ ו $y \neq 0$ נקבל שהמשוואות מתקיימות בכל נקודה שבה $x^2 + y^2 = 1$.
אם $x = 0$ נקבל שהמשוואה השניה היא:

$$2y - 2y^3 = 0$$

שפתרונותיה הם $y = 0$או $y = \pm 1$ ובדומה נקבל שאם $y = 0$ אז $x = 0$או $x = \pm 1$. ולכן הנקודות הקריטיות הן

$$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(0, 0)\}$$

היות ו $f(x, y) \geq 0$ ו $f(0, 0) = 0$ ברור ש $(0, 0)$ היא נקודת מינימום. כדי לחקור את שאר הנקודות אפשר להציב $t = x^2 + y^2$ ולחקור את הפונקציה $g(t) = te^{-t}$ בנקודה $t = 1$.
נקבל ש

$$g' = e^{-t} - te^{-t}$$

$$g'' = -e^{-t} - e^{-t} + te^{-t}$$

ולכן

$$g''(1) = -2e^{-1} + e^{-1} = -e^{-1} < 0$$

ולכן זו נקודת מקסימום ולכן גם הנקודות שבהן $x^2 + y^2 = 1$ הן נקודות מקסימום.

סעיף ו

$$f(x, y) = x^2 y$$

הנגזרות החלקיות הן

$$f_x = 2xy, \quad f_y = x^2$$

ברור שהן שוות לאפס בכל נקודה שבה $x = 0$. לכן אלה הנקודות הקריטיות, נותר למיין אותן. ההסיאן היא

$$H_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 2x & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$H_{(0,y)} = \begin{pmatrix} 2y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

שזאת לא מטריצה הפיכה. צריך לבדוק אחרת.
ראשית נסתכל על הנקודה $(0, 0)$

$$f(0, 0) = 0$$

אם מתקדמים ל $(0,0)$ לאורך $x=y$ מתקבל ש

$$f(x,x)=x^3$$

וב 0 יש לפונקציה נקודת פיתול ולכן $(0,0)$ היא נקודת אוכף.
אם $y>0$ אז

$$f(x,y)\geq 0$$

אבל בנקודה $(0,y)$ מתקיים

$$f(0,y)=0$$

ולכן ברור שהיא מינימום מקומי.
באופן דומה, כאשר $y<0$ הנקודה $(0,y)$ היא מקסימום מקומי.

סעיף ז

$$f(x,y,z)=x^4+y^4+z^4-2a^2(x^2+y^2+z^2)\quad(a>0)$$

נחשב נגזרות חלקיות ונשווה ל 0

$$f_x=4x^3-4a^2x=0\Rightarrow x\in\{0,a,-a\}$$

$$f_y=4y^3-4a^2y=0\Rightarrow y\in\{0,a,-a\}$$

$$f_z=4z^3-4a^2z=0\Rightarrow z\in\{0,a,-a\}$$

קיבלנו שיש 27 נקודות קריטיות

$$\{0,a,-a\}\times\{0,a,-a\}\times\{0,a,-a\}$$

נמצא את מטריצת ההסיאן

$$H_{(x,y,z)}=\begin{pmatrix}12x^2-4a^2 & 0 & 0\\ 0 & 12y^2-4a^2 & 0\\ 0 & 0 & 12y^2-4a^2\end{pmatrix}$$

ולכן

$$H_{(0,0,0)}=\begin{pmatrix}-4a^2 & 0 & 0\\ 0 & -4a^2 & 0\\ 0 & 0 & -4a^2\end{pmatrix}$$

זאת מטריצה שלילית לחלוטין ולכן $(0,0,0)$ היא נקודת מקסימום.

$$H_{(\pm a,0,0)}=\begin{pmatrix} 8a^2 & 0 & 0 \\ 0 & -4a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -4a^2 \end{pmatrix}$$

זאת מטריצה מעורבת ולכן $(\pm a,0,0)$ היא נקודת אוכף, באופן דומה $(0,\pm a,0)$ ו $(0,0,\pm a)$ הן נקודות אוכף.

$$H_{(\pm a,\pm a,0)}=\begin{pmatrix} 8a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 8a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -4a^2 \end{pmatrix}$$

זאת מטריצה מעורבת ולכן $(\pm a,\pm a,0)$ היא נקודת אוכף.באופן דומה גם $(\pm a,0,\pm a)$ ו $(0,\pm a,\pm a)$ הן נקודות אוכף.
כעת,

$$H_{(\pm a,\pm a,\pm a)}=\begin{pmatrix} 8a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 8a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 8a^2 \end{pmatrix}$$

זאת מטריצה חיובית לחלוטין ולכן אלה נקודות מינימום.

שאלה 2

$$f(x,y)=3xe^y-x^3-e^{3y}$$

נשווה נגזרות חלקיות ל0.

$$f_x=3e^y-3x^2=0,\quad f_y=3xe^y-3e^{3y}=0$$

מהמשוואה השניה נקבל ש

$$x=e^{2y}$$

אם נציב זאת במשוואה הראשונה נקבל

$$3e^y-3e^{4y}=0\Rightarrow e^{3y}=1\Rightarrow y=0$$

לכן הנקודה הקריטית היחידה היא $(1,0)$
נמצא את מטריצה ההסיאן

$$H_{(x,y)}=\begin{pmatrix} -6x & 3e^y \\ 3e^y & 3xe^y-9e^{3y} \end{pmatrix}$$

ולכן

$$H_{(1,0)}=\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$$

המינור הראשון הוא -6 והמינור השני הוא $36-9>0$ ולכן זאת מטריצה שלילית לחלוטין ולכן $(1,0)$ היא נקודת מקסימום.
נותר לבדוק אם זאת נקודת קיצון גלובאלית

$$f(1,0)=3-1=2$$

אבל

$$f(-10,0)=-30+1000-1>2$$

ולכן זה לא מקסימום גלובאלי.
(במשתנה אחד אם לפונקציה רציפה יש מקסימום מקומי ואין לה מינימום מקומי אז המקסימום הוא בהכרח גלובאלי).

שאלה 3

סעיף א

$$f(x,y)=(y-3x^2)(y-x^2)$$

נחשב נגזרות חלקיות

$$f_x=-6x(y-x^2)+(y-3x^2)(-2x), \quad f_y=(y-x^2)+(y-3x^2)$$

קל לראות ש $(0,0)$ מאפסת את שתי הנגזרות החלקיות ולכן היא נקודה קריטית.

סעיף ב

$$f\circ g(t)=(bt-3a^2t^2)(bt-a^2t^2)=b^2t^2-3a^2bt^3-a^2bt^3+3a^4t^4=3a^4t^4-4a^2bt^3+b^2t^2$$

נחקור פונקציה זו בשיטות רגילות של אינפי 1. נגזרת ראשונה:

$$12a^4t^3-12a^2bt^2+2b^2t$$

ברור ש $t=0$ הוא פתרון.
נגזרת שניה:

$$36a^4t^2-24a^2bt+2b^2$$

אם נציב $t=0$ נקבל $2b^2>0$ ולכן זה מינימום.

סעיף ג

נתקדם לאורך $y=2x^2$ ונקבל

$$f(x,2x^2)=(2x^2-3x^2)(2x^2-x^2)=-x^4$$

לפונקציה זו יש מקסימום בנקודה $x=0$ ולכן $(0,0)$ אינה נקודת מינמום אלא נקודת אוכף.

שאלה 4

סעיף א

היות ו f פונקציה רציפה ו D קבוצה סגורה אז f מקבלת מינימום ומקסימום עליה.

סעיף ב

נחפש תחילה נקודות קריטיות בתוך המשולש

$$f_x = 2x - y - 2 = 0$$

$$f_y = 2y - x - 2 = 0$$

זאת מערכת לינארית פשוטה הפתרון היחיד הוא

$$x = 2 \quad y = 2$$

נקודה זאת אכן בתוך המשולש והיא נקודה קריטית. נעבור על צלעות המשולש: עבור $y = 0$

$$f(x, 0) = x^2 - 2x$$

$$f' = 2x - 2$$

נקודה קריטית ב $x = 1$כלומר $(1, 0)$. בדומה קל למצוא את הנקודה הקריטית $(0, 1)$ על הצלע $x = 0$. על הצלע $x + y = 6$ נקבל:

$$\begin{aligned} f(x, 6-x) = {} & x^2 + (6-x)^2 - x(6-x) - 2x - 2(6-x) = \\ & x^2 + 36 + x^2 - 12x - 6x + x^2 - 2x - 12 + 2x = \\ & 3x^2 - 18x + 24 \end{aligned}$$

נגזור ונקבל

$$f' = 6x - 18$$

כלומר $x = 3$ נקודה קריטית. אם נאסוף את כל הנקודות החשודות נקבל את $(0, 1), (1, 0), (3, 3), (2, 2)$ ובנוסף את הקודקודים $(0, 0), (6, 0), (0, 6)$ ולכן נותר לבדוק:

$$f(0, 6) = 24, \quad f(6, 0) = 24, \quad f(0, 0) = 0$$

$$f(2, 2) = -4, \quad f(3, 3) = -3, \quad f(1, 0) = f(0, 1) = -1$$

קיבלנו ש $(0, 6)$ו $(6, 0)$ הם מקסימום גלובאלי וערכם 24. ו $(2, 2)$ הוא מינימום גלובאלי שערכו -4.