אלגברה לינארית 1 – תשע'א – תירגול 8

<u>טענה חשובה :</u> העתקה לינארית $T: V \to W$ הינה חד חד ערכית $\Leftrightarrow$ וקטור האפס ב- V הוא הוקטור היחיד שמועתק לוקטור אפס של W .

<u>הוכחה:</u> אם T חד חד ערכית ויהי $v \in V$ כך ש $T(v) = 0$. מכיוון שגם $T(0) = 0$ נקבל מחד חד הערכיות כי בהכרח $v = 0$.

מצד שני נניח שוקטור האפס הוא היחיד המועתק לאפס , ונראה כי ההעתקה חח"ע. נניח כי $u, v \in V$ כך ש: $T(u) = T(v)$ אז , מלינאריות ההעתקה נקבל:

$T(u-v) = T(u) - T(v) = 0$ ומכיוון שהנחנו שרק וקטור האפס מועתק לאפס נקבל $u - v = 0$. לכן $u = v$ והוכחנו חד חד ערכיות!.

<u>תרגיל 1-11</u>

נתונה העתקה לינארית $T: V \to W$. הוכיחו:

א.אם $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ קבוצה בת"ל – אז גם $\{v_1, \dots, v_n\}$ בת"ל .

ב. אם T חד חד ערכית והקבוצה $\{v_1, \dots, v_n\}$ קבוצת וקטורים בת"ל , אז גם אברי הקבוצה $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ בת"ל .

<u>פיתרון:</u>

א.נראה שצירוף לינארי מתאפס של ה- v_{i} יחייב שכל מקדמיו אפסים:

יהי $a_1 v_1 + \cdots a_n v_n = 0$.נפעיל את ההעתקה על שני צידי השיוויון ונקבל :

$0 = T(0) = T(a_1 v_1 + \cdots a_n v_n) = a_1 T(v_1) + \cdots a_n T(v_n)$, אך קיבלנו צירוף לינארי מתאפס של קבוצת הוקטורים הבת"ל $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$, ולכן כל מקדמיו אפסים! .

ב. יהי צירוף לינארי מתאפס $a_1 T(v_1) + \cdots a_n T(v_n) = 0$ כאשר $\{v_1, \dots, v_n\}$

קבוצה בת"ל.נראה כי כל המקדמים בהכרח אפסים! מלנאריות נקבל:

$$0 = a_1 T(v_1) + \cdots a_n T(v_n) = T(a_1 v_1) + \cdots + T(a_n v_n) = T(a_1 v_1 + \cdots a_n v_n)$$

מכך שלכל העתקה לינארית קיים $T(0) = 0$ ומחד חד ערכיות ההעתקה נקבל כי : $a_1 v_1 + \cdots a_n v_n = 0$, ומכאן צירוף לינארי מתאפס של וקטורים בת"ל ולכן כל המקדמים אפסים ! כנדרש.

<u>תרגיל 1-12 .</u>

א.האם יש העתקה לינארית $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ שהיא "על"?

ב.האם יש העתקה לינארית $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ שהיא חד חד ערכית?

<u>פתרון</u>:

א. אם הייתה העתקה על כזו , אז נקבל קיום ארבעה וקטורים $v_i\ , i = 1,2,3,4$

ב- $\mathbb{R}^3$ כך ש: $T(v_i) = e_i$ כאשר e_i הוקטורים הסטנדרטיים של $\mathbb{R}^4$ עם "1" אחד במקום i ואפס אחרת.

אבל אז , מהתרגיל הקודם נקבל כי קבוצת ה v_i היא קבוצה של 4 וקטורים בת"ל במרחב 3 מימדי ... בסתירה !

ב. בדומה לא' , אם הייתה העתקה חד חד ערכית כזו , אז כשנפעיל אותה על קבוצת הוקטורים e_i הסטנדרטיים של $\mathbb{R}^4$ נקבל מסעיף ב' בתרגיל הקודם כי 4 תמונות הוקטורים האלו יהיו קבוצה בת"ל במרחב 3 מימדי !

<u>העתקה הפיכה – הגדרה</u>:

העתקה $T: V \to U$ היא הפיכה אם יש העתקה $S: U \to V$ כך ש:

$TS = I_U\ , ST = I_V$. במקרה זה מסמנים $S := T^{-1}$.

<u>תרגיל 1.19</u>:

בהתאם להגדרה הנ"ל , הוכיחו שאם $T: V \to U$ לינארית והפיכה , אז גם T^{-1} לינארית , וגם היא הפיכה כאשר $(T^{-1})^{-1} = T$.

<u>פיתרון :</u>

ההעתקה ההופכית היא חח"ע ועל ונראה את הלינאריות:

יהיו $a \in \mathrm{F}\ , u, v \in U$. נסמן $u' = T^{-1}(u), v' = T^{-1}(v)$. אז קיים

$T(u') = u\ , T(v') = v$, לפי הגדרת ההופכי. מכיוון ש- T לינארית נקבל :

$T(u' + v') = T(u') + T(v') = u + v,\ \ T(av') = aT(v') = av$ ולכן

$T^{-1}(u + v) = u' + v'\ ,\ T^{-1}(av) = av' = aT^{-1}(v)$.

והוכחנו לנאריות!

נראה בתרגיל כי אם $T\colon \mathrm{F}^n \to \mathrm{F}^n$ לינארית המוגדרת על ידי $T(v) = Av$ עבור מטריצה A הפיכה , אז T^{-1} מוגדרת על ידי: $T^{-1}(u) = A^{-1}u$

<u>תרגיל:</u>

תהי $T\colon V \to W$ העתקה לינארית ותהי $K \subseteq V$ תת קבוצה כלשהיא.

הוכיחו כי $T\big(span(K)\big) = span\{T(K)\}$, כאשר $T(G) = \{T(g) | g \in G\}$ עבור קבוצת וקטורים G.

<u>פיתרון</u>

נראה הכלה הפוכה בין הקבוצות:

עבור $v \in span(K)$, קיים צירוף לינארי מהצורה : $v = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$

עבור וקטורים v_i ב- K וסקלרים a_i מהשדה. מכאן :

$T(v) = T(\sum_{i=1}^{n} a_iv_i) \underbrace{=}_{\text{לינאריות}} \sum_{i=1}^{n} a_iT(v_i) \in span(T(K))$, כאשר השיוויון

האחרון נובע מכך ש $T(v_i) \in T(K)$ לכל $1 \le i \le n$. מכאן נסיק כי

$\boldsymbol{T(span(K)) \subseteq span(T(K))}$

<u>כיוון שני</u> : יהי $w \in span(T(K))$. אז יש $T(v_1), \dots, T(v_m)$ ב- $T(K)$
$v_i \in K$, ויש סקלרים a_i כך ש: $w = \sum_{i=1}^{m} a_iT(v_i)$. מלינאריות נקבל:

$w = T(\sum_{i=1}^{m} a_iv_i)$. מכאן נובע כי $w \in T(span(K))$. ובסך הכל הראינו :

$\boldsymbol{span(T(K)) \subseteq T(span(K))}$.

וקיבלנו בצירוף שתי ההכלות כי: $\boldsymbol{span\big(T(K)\big) = T(span(K))}$.

---

*העתקה לינארית הפיכה נקראת **איזומורפיזם** של מרחבים וקטוריים .

שני מרחבים איזומורפיים(כלומר שיש איזומורפיזם ביניהם) הם "אותו דבר" במובן שהמבנה הלינארי של שניהם "זהה". בנוסף (תרגיל 1-25) מראה כי שני מרחבים לינאריים מאותו מימד הם איזומורפיים !

נסמן : V איזומורפי ל- U על ידי $V \cong U$

הוכחתם כי עבור מרחב וקטורי V נוצר סופית מעל שדה F, $n = \dim(V)$.אם נקבע בסיס B כלשהוא עבור המרחב.אז ההעתקה $T: V \to \mathrm{F}^n$ המוגדרת על ידי:

$T(v) \coloneqq [v]_B$ (כלומר העתקה ששולחת כל וקטור במרחב לוקטור הקואורדינאטות שלו ביחס לבסיס הנ"ל) – היא איזומורפיזם .

מעובדה זו נסיק כי במרחב וקטורי V ממימד n מעל שדה F ובסיס B למרחב ,

אז – וקטורים $u_1, u_2, \dots, u_k$ במרחב תלויים לינארית אם ורק אם הוקטורים

$[u_1]_B, [u_2]_B, \dots, [u_k]_B$,תלויים לינארית ב- F^{n} .

<u>דוגמא:</u>

מרחב הפולינומים הבא: $V \coloneqq \mathbb{Q}_n[x]$ (מקדמים רציונליים !) – הוא מרחב עם בסיס $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ איזומורפי למרחב $\mathbb{Q}^{\mathrm{n}+1}$.

<u>תרגיל 1-26</u>

ההעתקה $T: \mathrm{F}^{m\,x\,n} \to \mathrm{F}^{n\,x\,m}$ שמוגדרת על ידי $T(A) = A^t$ הינה איזומורפיזם.

<u>פתרון</u>

לינאריות: $T(A + kB) = (A + kB)^t = A^t + kB^t = T(A) + kT(B)$.

חח"ע: $T(A) = T(B) \Longrightarrow A^t = B^t \Longrightarrow A = B$.

על: עבור $A \in \mathrm{F}^{n\,x\,m}$ נקבל כי $T(A^t) = A$.

ניזכר ***במשפט ההגדרה של העתקה לינארית***: עבור V, W מרחבים לינאריים מעל אותו שדה ו<u>בסיס</u> $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ל- V אז עבור וקטורים $w_1, w_2, \dots, w_{\mathrm{n}}$ כלשהם במרחב W **קיימת** העתקה לינארית **יחידה** $T: V \to W$ עבורה

$T(v_i) = w_i$. (כלומר , העתקה לינארית נקבעת על ידי תמונות הפעולה שלה על איברי בסיס).

<u>תרגיל:</u>

תהי העתקה לינארית $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ כך ש-

$T(0,1)=(4,5,6),T(1,1)=(1,2,3)$. יש למצוא את נוסחת ההעתקה (כלומר $T(a,b)$ לוקטור כללי.

<u>פתרון:</u>

שימו לב כי הוקטורים $(0,1),(1,1)$ מהווים בסיס ל- $\mathbb{R}^2$, לכן עבור וקטור כללי (a,b) במרחב המקור שלנו נציג אותו כצירוף לינארי של אברי בסיס זה

כלומר נמצא מקדמים x,y כך ש:

$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, שכמובן יהיו תלויים ב- a,b . בעצם יש לנו מערכת משוואות כשהמשתנים הם המקדמים x,y , כלומר יש לפתור :

$\left(\begin{array}{cc|c}0&1&a\\1&1&b\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}1&0&b-a\\0&1&a\end{array}\right)$ נפתור ונקבל : $y=a\ ,x=b-a$

כלומר : $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=(b-a)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+a\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

מכאן נקבל מלינאריות ההעתקה כי :

$$T\left(\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\right)=T\left((b-a)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+a\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)=(b-a)T\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)+aT\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)=$$

$$=(b-a)\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}+a\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4b-3a\\5b-3a\\6b-3a\end{pmatrix}$$

<u>תרגיל:</u>

יהיו שלושה וקטורים ב- $\mathbb{R}^3$: $v_3=\begin{pmatrix}1\\4\\7\end{pmatrix}, v_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, v_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.

א.בהינתן שלושה וקטורים ב- $\mathbb{R}^2$: $w_3=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}, w_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, w_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$,

האם קיימת העתקה לינארית $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ כך ש: $i=1,2,3\ ,T(v_i)=w_i$.

אם קיימת כזו – כמה כאלו קיימות ותנו דוגמא לאחת .

ב.בדומה ל- א' אבל עם $w_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

<u>פתרון</u>

לפי משפט ההגדרה , נבדוק האם הוקטורים v_{i} מהווים בסיס ל- $\mathbb{R}^3$. נשתמש בשיטה של הצבת הוקטורים האלו בעמודות מטריצה , דירוגה ומציאת מיקומי האיברים המובילים כדי למצוא קבוצה בת"ל ופורשת מתוך ה- v_{i}:

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, ומפתרון המערכת נקבל כי v_3 הינו צירוף לינארי של השניים האחרים , שהינם בת"ל , על ידי:

$v_3 = 3v_1 - 2v_3$. לפי הנתונים נקבל : $T(v_3) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, ,

$T(3v_1 - 2v_2) = 3T(v_1) - 2T(v_2) = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, ולכן לא קיבלתנו סתירה ולכן קיימת העתקה לינארית שמקיימת זאת .

בעצם קיימות אינסוף העתקות כאלו ! למשל , נשלים את v_1, v_2 לבסיס למרחב על ידי השמת שניהם כשורות מטריצה , דירוגה , והוספת וקטור סטנדרטי שיחד איתם ישלים לבסיס ל- $\mathbb{R}^3$:

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ולכן נוסיף וקטור סטנדרטי $(0,0,1)$ והשלמנו לבסיס. כעת נוכל לבחור וקטור כלשהו ב- $\mathbb{R}^2$, נקרא לו w_3 , אליו יועתק הוקטור החדש $(0,0,1)$, ואנו יודעים לפי משפט ההגדרה כי יש העתקה לינארית <u>יחידה</u> שמקיימת $T(v_i) = w_i$. כך ,לכל וקטור כזה ב- $\mathbb{R}^2$ נקבל העתקה אחרת , ולכן אינסוף העתקות לינאריות , שכולן מקיימות את הנתון ב- א' ! .

ב. במקרה זה ראינו כבר כי אין שיוויון :

$$T(3v_1 - 2v_2) = 3T(v_1) - 2T(v_2) = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = T(v_3)$$

אך עדיין מתקיים $v_3 = 3v_1 - 2v_3$, וקיבלנו סתירה ולכן במקרה זה אין העתקה לינארית כזו !

גרעין ותמונה של העתקה לינארית

עבור העתקה לינארית $T: V \to W$ נגדיר את המרחבים הבאים:

גרעין T : $\ker(T) \coloneqq \{v \in V | T(v) = 0\}$.

תמונת T : $im(T) \coloneqq \{T(v) | v \in V\}$.

שני מרחבים אלו שהוגדרו הם מרחבים לינאריים כאשר

Ker(T) תת מרחב של V , im(T) תת מרחב של W .

*משפט מרכזי בהקשר הזה הוא משפט הדרגה של העתקה לינארית :

$$\boldsymbol{dim\big(Ker(T)\big) + dim\big(Im(T)\big) = dim\ (V)}$$

*לפי תוצאה קודמת , העתקה כזו היא חד חד ערכית $\Leftrightarrow Ker(T) = \{0\}$.

דוגמא :

$T: \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^3$ שמוגדרת על ידי: $T(f) \coloneqq (f(-1), f(0), f(1))$

(העובדה שההעתקה לינארית נובעת מתכונות של חיבור פולינומים והצבת ערכים בפולינום ...) .

תזכורת : לפולינום שונה מאפס ממעלה k יש לכל היותר k שורשים שונים.

(זה יהיה שימושי בקרוב ...)

נמצא את גרעין ותמונת ההעתקה:

$f \in Ker(T)$ אם ורק אם $T(f) = 0_{\mathbb{R}^3}$ כלומר אם

$f(-1) = f(0) = f(1) = 0$. אבל תנאי זה הוא בעצם על פולינום ממעלה 2 או פחות , בעל שלושה שורשים שונים ! ומהתזכורת למעלה נסיק שהפולינום חייב להיות פולינום האפס , כלומר איבר האפס במרחב הפולינומים הנ"ל :

$Ker(T) = \{0\}$. כלומר מימדו הוא אפס .

נמצא את תמונת ההעתקה:

$$(a, b, c) \in Im(T) \leftrightarrow \exists f \in \mathbb{R}_2[x] . \big(\mathrm{f}(-1), \mathrm{f}(0), \mathrm{f}(1)\big) = (0,0,0)$$

כלומר אם קיים פולינום במרחב , שצורתו הכללית

$f(x) = d_0 + d_1 x + d_2 x^2$ כך ש $\big(\mathrm{f}(-1), \mathrm{f}(0), \mathrm{f}(1)\big) = (0,0,0)$

וזה מתורגם לשלוש משוואות בשלושה נעלמים :

$$\begin{cases} d_0 - d_1 + d_2 = a \\ d_0 = b \\ d_0 + d_1 + d_2 = c \end{cases}$$ כשבפיתרון מחפשים את אותם a, b, c עבורם למערכת הזו יש פיתרון . אם נפתור את המערכת המתאימה נקבל שעבור כל שלושה מספרים כאלו קיים פיתרון ! לכן $Im(T) = \mathbb{R}^3$ (כלומר "פונקציה על"). ומכאן שמימד התמונה הוא 3 ווידאנו קיום משפט המימדים.

<u>תרגיל:</u>

יהי V מרחב וקטורי ויהי U תת מרחב שלו. תהי העתקה לינארית $T: V \to V$.

נגדיר $T(U) = \{T(u) | u \in U\}$. אז $T(U)$ היא תת מרחב של V , ואם נתון כי $U \cap Ker(T) = \{0\}$, יש להוכיח כי $\dim(U) = \dim(T(U))$

<u>פתרון</u>

בדיקה ישירה כי $T(U)$ מרחב לינארי ... או על סמך תמונת העתקה שהיא צמצום ההעתקה המקורית לתת המרחב .

נבחר בסיס $\{u_1, \ldots, u_n\}$ ל- U . נסתכל על הקבוצה: $\{T(u_1), \ldots, T(u_n)\}$.

קבוצה זו פורשת את $T(U)$ (בדיקה ישירה שוב ...) , ויספיק להראות כי היא קבוצה בת"ל . מזה נסיק את הדרוש !

לכן , יהיה צירוף לינארי מתאפס של איברי הקבוצה הזו :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i T(u_i) = 0 \implies T\left(\sum_{i=1}^{n} a_i u_i\right) = 0$$

ומכאן נובע $\sum_{i=1}^{n} a_i u_i \in Ker(T) \cap U = \{0\}$, ולכן $\sum_{i=1}^{n} a_i u_i = 0$

צירוף לינארי מתאפס של וקטורים בת"ל – לכן כל מקדמיו אפסים ומש"ל !

<u>תרגיל 2-3</u>

$T: V \to V$ העתקה לינארית .יש להוכיח:

א. $Ker(T) \subseteq Ker(T^2)$

ב. $Im(T^2) \subseteq Im(T)$

<u>פתרון : פשוט לפי הגדרה</u>

א. יהיה $v \in Ker(T)$. אז $T(v) = 0$, ולכן $T^2(v) = T(T(v)) = T(0) = 0$

והוכחנו את א' .

ב. עבור $v \in Im(T^2)$ נובע כי $v = T^2u$ עבור איזשהוא $u \in V$.

אבל אז נקבל $v = T(T(u)) \in ImT$ ומש"ל

<u>תרגיל 2.18</u>

$T: V \to V$ העתקה לינארית .יש להוכיח שהבאים שקולים :

א. $Ker(T) = Ker(T^2)$

ב. $Im(T^2) = Im(T)$

ג. $V = Ker(T) \oplus Im(T)$

<u>פתרון</u>

נשים לב כי $T^2: V \to V$ לינארית ומתקיים עבורה משפט המימדים ונקבל :

$$\dim(V) = \dim(Kern(T)) + \dim(Im(T)) = \dim(Kern(T^2)) + \dim\,(Im(T^2)$$

<u>בהינתן א'</u> נקבל כי

$$\dim(Im(T)) = \dim(V) - \dim\,(Kern(T) = \dim(V) - \dim(Kern(T^2)) =$$
$\dim\,(Im(T^2))$, אבל מהתרגיל הקודם ידוע כי $Im(T^2) \subseteq Im(T)$, ואז אם בנוסף בעלי אותו מימד אז הם שווים זה לזה כשני תתי מרחבים ! לכן מתקיים ב' . סעיף ב' גורר את א' בהסתמך על התרגיל הקודם.

<u>נראה כעת כי א' שקול ל-ג'</u> :

כיוון אחד – נניח כי $Ker(T) = Ker(T^2)$, ויהי $v \in Ker(T) \cap Im(T)$.

אז נובע כי $T(v) = 0 \; and \; \exists u. Tu = v$ כלומר ,

$T^2(u) = T(T(u)) = T(v) = 0$, כלומר נובע כי

$u \in Kern(T^2) = Kern(T)$, ולכן $v = T(u) = 0$ והוכחנו שהחיתוך הוא האפס. נקבל מכך כי

$$\dim(Ker(T)) + \dim(Im(T)) - \dim(Ker(T) \cap Im(T)) = \dim\,(Im(T) + Ker(T))$$

$$\dim(V) = \dim\big(Ker(T)\big) + \dim\big(Im(T)\big) = \dim\,(Im(T) + Ker(T))$$

לא מדובר רק על סכום אלא על סכום ישר כנדרש!

<u>כיוון שני : </u>נניח מתקיים ג' ואז מספיק להוכיח (כל סמך תרגיל 2-3 כי מתקיים

$Ker(T) \supseteq Ker(T^2)$.

$$v \in Ker(T^2) \Longrightarrow T\big(T(v)\big) = 0 \Longrightarrow Tv \in Ker(T) and\ Tv \in Im(T) \Longrightarrow$$

$v \in Ker(T) \Longleftarrow Tv = 0 \Longleftarrow Tv \in Ker(T) \cap Im(T) = \{0\}$ כנדרש !