בוחן בטופולוגיה

יש לענות על כל שלוש השאלות. הניקוד על כל שאלה הוא 36 נקודות. חלוקת הנקודות בין הסעיפים שווה.
בהצלחה!

1. תזכורת: l_∞ הוא המרחב של כל הסדרות החסומות מעל הממשיים. כלומר, $l_\infty = \{(x_n) : \sup|x_n| < \infty\}$, עם נורמת הסופרימום: $||(x_n)|| = \sup|x_n|$.

(א) יהי $i \in \mathbb{N}$ קבוע, ונסתכל על פונקציית ההטלה: $\Pi_i : l_\infty \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $\Pi_i((x_n)) = x_i$. הוכיחו שהפונקציה רציפה.

(ב) תהי סדרה מתכנסת בl_∞: $(x_n^i) \to (x_n)$. כאשר (x_n^i) מסמל את האיבר הi בסדרה המתכנסת. הוכיחו שיש התכנסות רכיב־רכיב. כלומר, לכל $n \in \mathbb{N}$, $x_n^i \to x_n$.

(ג) תהי סדרה בl_∞ $((x_n^i))$ שמתכנסת רכיב־רכיב. כלומר, לכל $n \in \mathbb{N}$ קיים $x_n \in \mathbb{R}$ כך ש $x_n^i \to x_n$. הוכיחו/הפריכו: הסדרה $((x_n^i))$ מתכנסת בl_∞.

(א) נוכיח רציפות בנקודה. תהי (x_n) סדרה בl_∞. $\Pi_i((x_n)) = x_i$. יהי $\epsilon > 0$ נתון. נקח $\delta = \epsilon$אם $d((x_n),(y_n)) < \epsilon$ אז מהגדרה זה אומר ש $\sup_n |x_n - y_n| < \epsilon$, ובפרט, $|\Pi_i((x_n)) - \Pi_i((y_n))| = |x_i - y_i| < \epsilon$. מש"ל

(ב) כזכור, פונקציה רציפה שומרת התכנסות. ראינו שלכל $i \in \mathbb{N}$ ההטלה Π_i רציפה. ולכן $(x_n^i) \to (x_n) \Longleftarrow \Pi_n((x_n^i)) \to \Pi_n((x_n)) \Longleftarrow x_n^i \to x_n$.

(ג) הפרכה: נסתכל על הסדרה (e_i), כאשר לכל i, e_i היא הסדרה שכל רכיביה אפסים, חוץ מהמקום הi שבו יש 1 . הסדרה הזאת מתכנסת רכיב־רכיב, כי בכל רכיב יש סדרה שקבועה לבסוף על 0 ץ אולם, היא לא מתכנסת, כי אינה סדרת קושי, כי לכל i,j $d((x_n^i),(x_n^i)) = 1$.

2. נתבונן בקבוצת המספרים השלמים $\mathbb{Z}$, ולכל $n \in \mathbb{N}$ נגדיר: $O_n = \{n, n+1, n+2...\}$. נסתכל על האוסף $\tau = \{O_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{Z}\}$.

(א) הוכיחו שτ מהווה טופולוגיה על $\mathbb{Z}$.

(ב) תהי $f : (\mathbb{Z}, \tau) \to (\mathbb{Z}, \tau_{disc})$ פונקציה רציפה. הוכיחו שהיא קבועה.

(א) מההגדרה היא מכילה את הקבוצה הריקה ואת כל המרחב. איחוד כלשהו: נניח שO_i כולן קבוצות, ונרצה להוכיח ש $\bigcup O_i$ פתוחה. אם יש i כך ש$O_i = \mathbb{Z}$, אז סיימנו. אחרת, לכל i, $O_i = O_n$ עבור איזשהו n. נקח $m = \min\{n : O_i = O_n\}$, כלומר, נקח את ה$n$ הקטן מבינהם, אז $\bigcup O_i = O_m$.חיתוך סופי: אם אחת הקבוצות היא הקבוצה הריקה, טריוויאלי. אחרת, נסתכל על $O_n \cap O_m$. נניח בה"כ ש $m < n$, אז $O_m \cap O_n = O_n$. (נשים לב שחיתוך עם $\mathbb{Z}$ לא משנה כלום).

(ב) נניח בשלילה שהפונקציה לא קבועה. יש $n,m \in \mathbb{Z}$ כך ש $f(n) \neq f(m)$.
נסמן $f(n) = x, f(m) = y$. בה"כ $n < m$. $\{x\}$ היא סביבה פתוחה של x בטופולוגיה הדיסקרטית. לכן $f^{-1}\{x\}$ היא קבוצה פתוחה בτ. ברור ש $n \in f^{-1}\{x\}$. אבל בτ הקבוצות הפתוחות שאינן ריקות מקיימות, שאם $n \in O$ אז לכל $n < n'$, $n' \in O$. לכן $m \in f^{-1}\{x\}$. כלומר, $f(m) = x$. סתירה.

3. יהי X מרחב שלם ו$A \subseteq X$. הוכיחו: A מרחב שלם (כתת מרחב של X) $\Longleftrightarrow$ A סגורה בX.

$\Longleftarrow$ נניח בשלילה שA לא סגורה. אז יש סדרה $\{x_n\} \subseteq A$ כך ש$x_n \to x$, אבל $x \notin A$. $\{x_n\}$ מתכנסת בX $\Longleftarrow$ $\{x_n\}$ סדרת קושי בX $\Longleftarrow$ $\{x_n\}$ סדרת קושי בA. אבל $\{x_n\}$ לא מתכנסת בA. הסבר: אם $a \in A$ $x_n \to$, אז גם בX מתקיים ש$x_n \to a$. מיחידות הגבול $a = x$. אבל הנחנו ש$x \notin A$. מסקנה: A לא מרחב מטרי שלם.
$\Longrightarrow$ נניח שA קבוצה סגורה. תהי $\{x_n\}$ סדרת קושי בA. אז $\{x_n\}$ סדרת קושי בX. בגלל שX שלם, קיים $x \in X$ כך ש $x_n \to x$. מכיוון שA סגורה היא מכילה את כל הגבולות של סדרות מתוכה, ולכן $x \in A$. כלומר, $\{x_n\}$ מתכנסת בA. מסקנה: A מרחב מטרי שלם.