תרגול 6

2 בדצמבר 2013

צירופים לינארית ותלות לינארית

לדוגמא: $V=\mathbb{R}^2$ מעל $\mathbb{F}=\mathbb{R}$. אזי $\pi\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}-\sqrt{3}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ הוא צירוף לינארי.

הגדרה: יהיה V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. יהיו $v_1,v_2\dots,v_n\in V$ ו $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\in\mathbb{F}$ אזי

1. ביטוי מהצורה $\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\cdots\alpha_nv_n$ נקרא צירוף לינארי (צ"ל).
2. אם כל $\alpha_i=0$ נקבל $0v_1+0v_2+\cdots0v_n=0$. צ"ל זה נקרא טרוויאלי.
3. אם קיים צ"ל לא טריוואלי כך ש $\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\cdots\alpha_nv_n=0$ אזי נאמר ש $\{v_1,v_2\dots,v_n\}$ תלויה לינארית (ת"ל). אחרת, אם הצ"ל הטריוולאי היחידי ששווה ל־0 אזי נאמר ש $\{v_1,v_2\dots,v_n\}$ בלתי תלויה לינארית (בת"ל).
   במילים אחרות $\{v_1,v_2\dots,v_n\}$ בת"ל אם $\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\cdots\alpha_nv_n=0$ גורר שכל $\alpha_i=0$

דוגמאות

1. $V=\mathbb{R}^2$ מעל $\mathbb{F}=\mathbb{R}$. $\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\}$ בת"ל
   כי $0=\alpha_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$
   פירושו $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{pmatrix}$ שזה גורר $\alpha_1,\alpha_2=0$.
2. $V=\mathbb{R}^3$ מעל $\mathbb{F}=\mathbb{R}$. האם $\{\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-3\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\}$ בת"ל?.
   נתבונן ב $0=\alpha_3\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}-1\\-3\\0\end{pmatrix}+\alpha_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$
   ונמיר אותו להצגה מטריצית $\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&1&-1\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$
   כעת השאלה שקולה האם יש פתרון לא טריאלי למערכת. נדרג ונבדוק

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

נציב $z = t$ ונקבל $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ -t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ פתרון לא טרוויאלי. כלומר הוקטורים הנ"ל ת"ל.

3. יהי $0 \neq v \in V$ אזי $\{v\}$קבוצה בת"ל.
4. $\{0\}$ קבוצה ת"ל כי $1 \cdot 0 = 0$ אבל הסקלאר שונה מאפס.
5. יהי $S = \{v_1 \ldots, v_n\}$ כך ש $0_V \in S$ אזי S ת"ל.
6. $V = \mathbb{R}_2[x]$ מרחב הפלינומים עד דרגה 2 מעל $\mathbb{R}$.
תהא $S = \{2 + 6x, x^2, 1 + 2x + 2x^2\}$.
האם $1 + x + x^2$ הוא צ"ל של איברי S?
פתרון: צריך למצוא $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$
כך ש $\alpha_1(2 + 6x) + \alpha_2 x^2 + \alpha_3(1 + 2x + 2x^2) = 1 + 1x + x^2$
כלומר לפי השוואת מקדמים : $2\alpha_1 + \alpha_3 = 1,\ 6\alpha_1 + 2\alpha_3 = 1,\ \alpha_2 + 2\alpha_3 = 1$
ובצורה מטריצית $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. נבדוק
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \rightarrow$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -0.5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$
כלומר $-0.5(2 + 6x) + (-3)x^2 + 2(1 + 2x + 2x^2) = 1 + 1x + x^2$.
7. יהיה V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. $S = \{v_1, \ldots v_n\}$ קבוצה בת"ל. הוכח $S' = \{v_1, w_2, \ldots w_n\}$ בת"ל כאשר $w_i = v_i + v_1$.
פתרון: נניח $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 w_2 + \cdots \alpha_n w_n = 0$ צ"ל כל $\alpha_i = 0$.
$$0 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 w_2 + \cdots \alpha_n w_n = \alpha_1 v_1 + \alpha_2(v_1 + v_2) + \cdots \alpha_n(v_1 + v_n)$$
$$= (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots \alpha_n v_n$$
כיוון ש $S = \{v_1, \ldots v_n\}$ בת"ל גורר ש $(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) = 0,\ \alpha_2 = 0 \ldots \alpha_n = 0$
$\Leftarrow \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 0 \ldots \alpha_n = 0 \Leftarrow S'$ בת"ל

המרחב הנפרש (span)

משפט: בסימונים לעיל $span(S) \subset V$ הינו תת מרחב שמכיל את S. והוא הכי קטן (כלומר אם $S \subset W$ אזי $span(S) \subseteq W$).

הגדרה: יהיה V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. יהיו $v_1, v_2 \ldots, v_n \in V$
אזי $span(\{v_1, v_2 \ldots, v_n\}) = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots \alpha_n v_n \mid \alpha_i \in \mathbb{F}\}$
ובאופן כללי $\emptyset \neq S \subset V$ אזי $span(S) = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots \alpha_n v_n \mid \alpha_i \in \mathbb{F}, v_i \in S\}$.
אוסף כל הצירופים הלינאריים של איברי S.

דוגמא $V = \mathbb{R}^3$ מעל $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ מהו $span(S)$?

פתרון: $span(S) = \{\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} | \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} | \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

כלומר מישור xy בתוך המרחב.

הערה: זה גם שווה ל $span(\{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} | \alpha, \beta \in \mathbb{R}\})$

דוגמא $v \in V$ אזי $span(\{v\}) = \{\alpha v \mid \alpha \in \mathbb{F}\}$

תרגיל: $V = \mathbb{R}^2$ מעל $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. $S = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}\}$

1. האם $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in span(S)$?

   פתרון: נבדוק האם קיימים $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

   כך ש $\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$?

   שקול לבדוק האם למערכת $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right)$ קיים פתרון?

   נבדוק $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -10 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \end{array}\right)$

   יש פתרון למערכת לדוגמא (אם נבחר שרירותית $\alpha_3 = 0$) $\alpha_1 = 3, \alpha_2 = -1$

   ואכן $3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. מהו $span(S)$?

   פתרון: באופן דומה נבדוק אלו וקטורים $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in span(S)$

   נדרג את המערכת $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & a \\ 1 & 3 & 2 & b \end{array}\right)$

   $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & a \\ 1 & 3 & 2 & b \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & a \\ 0 & 1 & 4 & b-a \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -10 & 3a-2b \\ 0 & 1 & 4 & b-a \end{array}\right)$

   ואכן $(3a - 2b) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (b - a) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

   כלומר $span(S) = \mathbb{R}^2 = V$

   הערה: רואים בפרט $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \in span(\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\})$ ולכן S ת"ל.

ובנוסף, $span(S)=span(\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\})$.

תרגיל־הוכח:

1. $A\subseteq span(A)$
2. $W\leq V$ ת"מ אזי $span(W)=W$
3. $A\subseteq B$ אזי $span(A)\subseteq span(B)$
4. מסקנה $A\subseteq span(B)$ אזי $span(A)\subseteq span(span(B))=span(B)$

הוכחה:

1. יהא $v\in A$ אזי v הוא גם צ"ל באיברי A ולכן שייך ל $span(A)$
2. לפי המשפט ש $span(W)$ הוא ת"מ הכי קטן שמכיל את W כיוון ש W מכיל את עצמו והוא ת"מ אזי מתקבל שיווין
3. יהא $\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\cdots\alpha_nv_n$ צ"ל באיברי A אזי כיוון ש $A\subseteq B$ זהו גם צ"ל באיברי B

תרגיל: $V=\mathbb{R}^{2\times 2}$ מעל $\mathbb{F}=\mathbb{R}$. $S=\{v_1=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},v_2=\begin{pmatrix}2&0\\1&3\end{pmatrix},v_3=\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix}\}$ מהו $span(S)$ והאם S בת"ל ?

פתרון רוצים למצוא את כל המטריצות $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$

כך ש $\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\alpha_3v_3=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$

נייצג כל מטריצה באמצעות וקטור. למשל $\begin{pmatrix}2\\0\\1\\3\end{pmatrix}\leftrightarrow\begin{pmatrix}2&0\\1&3\end{pmatrix}$

כעת השאלה שקולה ל $\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=\alpha_3\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}2\\0\\1\\3\end{pmatrix}+\alpha_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$.

ולכן, כמו קודם נדרג

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&a\\1&0&-1&b\\0&1&1&c\\1&3&0&d\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&b\\0&1&1&c\\1&3&0&d\\1&2&1&a\end{array}\right)\to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&b\\0&1&1&c\\0&3&1&d-b\\0&2&2&a-b\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&b\\0&1&1&c\\0&0&-2&d-b-3c\\0&0&0&a-b-2c\end{array}\right)$$

אם נבחר $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ רואים כי חייבים לקחת $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 = 0$ ולכן S בת"ל

בנוסף רק אם $a - b - 2c = 0$ יש פתרון למערכת ולכן

$$span(S) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a - b - 2c = 0\} = \{\begin{pmatrix} b+2c & b \\ c & d \end{pmatrix}\} =$$

$$\begin{pmatrix} b+2c & b \\ c & d \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= span\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$$