31.07.22

פתרון 84-172 מתמטיקה ב' לכימאים – דר' ארז שיינר – מועד א' – תשפ"ב

משך המבחן: שלוש שעות הוראות: יש לפתור את כל השאלות, משקל כל שאלה 28 נק', כל ציון מעל 100 יעוגל ל100

שאלה 1 נביט במערכת המשוואות הבאה עם הנעלמים x,y,z והפרמטר a, בשדה המספרים הממשיים.

$$\begin{cases} x+ay+z=a \\ ax+9y=a^2 \\ (1-a)x+(a-9)y+(a+6)z=3a-15 \\ (1+a)x+(a+9)y+z=a^2+a \end{cases}$$

ראשית נדרג את המטריצה המתאימה למערכת המשוואות

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & | & a \\ a & 9 & 0 & | & a^2 \\ 1-a & a-9 & a+6 & | & 3a-15 \\ 1+a & a+9 & 1 & | & a^2+a \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4-R_2]{R_3+R_2} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & | & a \\ a & 9 & 0 & | & a^2 \\ 1 & a & a+6 & | & a^2+3a-15 \\ 1 & a & 1 & | & a \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_3-R_1 \\ R_4-R_1}]{R_2-aR_1}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & | & a \\ 0 & 9-a^2 & -a & | & 0 \\ 0 & 0 & a+5 & | & a^2+2a-15 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

א. מצאו לכל ערכי הפרמטר a אם למערכת יש פתרון יחיד, אינסוף פתרונות או אין פתרונות כלל.

אם $a\neq\pm3,-5$ המטריצה מדורגת, אין שורת סתירה, אין משתנים חופשיים ולכן יש פתרון יחיד

כעת נציב $a=-5$ ונקבל

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 & | & -5 \\ 0 & -16 & 5 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

המטריצה מדורגת, אין שורת סתירה, יש משתנה חופשי ולכן יש אינסוף פתרונות

נציב $a=-3$ ונקבל

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & | & -3 \\ 0 & 0 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2 & | & -12 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-\frac{2}{3}R_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & | & -3 \\ 0 & 0 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & -12 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

לאחר דירוג אנחנו רואים שיש שורת סתירה, ולכן אין פתרון במקרה זה

נציב $a=3$ ונקבל

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & | & 3 \\ 0 & 0 & -3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 8 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3+\frac{8}{3}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & | & 3 \\ 0 & 0 & -3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

הגענו למטריצה מדורגת, ללא שורת סתירה, עם משתנה חופשי ולכן אינסוף פתרונות.

סה"כ:

פתרון יחיד עבור $a \neq \pm 3, -5$

אין פתרון עבור $a = -3$

אינסוף פתרונות עבור $a = 3, -5$

ב. מצאו את הפתרון למערכת עבור $a = 0$.

נציב $a = 0$ ונדרג קנונית (כי אנחנו מעוניינים למצוא את הפתרון)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 9 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 5 & | & -15 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{5}R_3]{\frac{1}{9}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -3 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 - R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 3 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -3 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

קיבלנו פתרון יחיד (כמו שראינו בסעיף א'):

$$x = 3, y = 0, z = -3$$

כלומר הפתרון הוא

$$(3,0,-3)$$

ג. מצאו את קבוצת הפתרונות למערכת עבור $a = -5$.

נחזור למטריצה שקיבלנו כאשר הצבנו $a = -5$ ונדרג אותה קנונית על מנת למצוא את הפתרון הכללי:

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 & | & -5 \\ 0 & -16 & 5 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{16}R_2} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 & | & -5 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{16} & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 + 5R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{9}{16} & | & -5 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{16} & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

נציב פרמטר במשתנה החופשי $z = t$ ונקבל

$$x = -5 + \frac{9}{16}t$$

$$y = \frac{5}{16}t$$

וסה"כ הפתרון הכללי הוא

$$\left(-5 + \frac{9}{16}t, \frac{5}{16}t, t\right) = (-5,0,0) + t\left(\frac{9}{16}, \frac{5}{16}, 1\right)$$

שאלה 2 תהי העתקה לינארית $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ המקיימת $T(1,1)=(3,3)$ וכן $T(0,1)=(a,b)$ עבור פרמטרים a,b.

א. חשבו את $T(-1,-1)$.

$$T(-1,-1)=T\big((-1)(1,1)\big)=(-1)\cdot T(1,1)=(-1)\cdot(3,3)=(-3,-3)$$

ב. חשבו את $T\big(T(1,1)\big)$.

$$T\big(T(1,1)\big)=T(3,3)=T\big(3(1,1)\big)=3\cdot T(1,1)=3\cdot(3,3)=(9,9)$$

ג. חשבו את $T(1,0)$ (הביעו תשובתכם באמצעות הפרמטרים a,b).

$$T(1,0)=T\big((1,1)-(0,1)\big)=T(1,1)-T(0,1)=(3,3)-(a,b)=(3-a,3-b)$$

ד. קבעו עבור אילו ערכי a,b המטריצה $[T]$ הפיכה.

ראשית, למדנו כי עמודות המטריצה המייצגת $[T]$ הן $T(1,0),T(0,1)$

כלומר

$$[T]=\begin{pmatrix}3-a & a\\ 3-b & b\end{pmatrix}$$

כעת, מטריצה הינה הפיכה אם ורק אם הדטרמיננטה שלה <u>שונה</u> מאפס.

$$\det([T])=\det\begin{pmatrix}3-a & a\\ 3-b & b\end{pmatrix}=b(3-a)-a(3-b)=3b-3a=3(b-a)$$

לכן הדטרמיננטה שונה מאפס אם ורק אם $a\neq b$, כלומר המטריצה $[T]$ הפיכה אם ורק אם $a\neq b$.

שאלה 3 אין קשר בין הסעיפים

א. מצאו את הערך המקסימלי ואת הערך המינימלי של הפונקציה $f(x,y)=x+y$ בתחום $D=\{(x,y)|x^4+y^4\leq 1\}$.

נמצא נקודות חשודות בפנים התחום, כלומר נקודות בתוך התחום בהן הגרדיאנט מתאפס:

$$f_x=1\neq 0$$

לא ייתכן כי הנגזרת החלקיות מתאפסות, ולכן <u>אין</u> נקודות חשודות בפנים הקטע.

כעת נמצא נקודות חשודות על שפת הקטע באמצעות שיטת כופלי לגראנז'

האילוף (השפה) נתון על ידי המשוואה

$$g(x,y)=x^4+y^4-1=0$$

משוואות כופלי לגראנז' הינן

$$\begin{cases}1=\lambda\cdot 4x^3\\ 1=\lambda\cdot 4y^3\\ x^4+y^4=1\end{cases}$$

נשים לב כי $\lambda \neq 0$ כיוון שאם $\lambda = 0$ אנחנו מקבלים סתירה לשתי המשוואות הראשונות.

לכן מותר לחלק בλ ולקבל כי

$$\frac{1}{\lambda} = 4x^3$$
$$\frac{1}{\lambda} = 4y^3$$

ולכן

$$4x^3 = 4y^3$$

ולכן

$$x = y$$

נציב את זה במשוואה השלישית ונקבל

$$x^4 + x^4 = 1$$

$$2x^4 = 1$$

$$x^4 = \frac{1}{2}$$

$$x = \pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$$

עבור $\lambda = \frac{1}{4\left(\pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)^3}$ קיבלנו שתי שלישית הפותרות את מערכת המשוואות, ולכן שני נקודות חשודות

$$\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$$

נציב את הנקודות החשודות בפונקציה ונקבל

$$f\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right) = \frac{2}{\sqrt[4]{2}} = \text{ערך מקסימלי}$$
$$f\left(\frac{-1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{-1}{\sqrt[4]{2}}\right) = \frac{-2}{\sqrt[4]{2}} = \text{ערך מינימלי}$$

ב. מצאו את המישור המשיק לפונקציה $f(x,y) = \frac{x}{e^{xy}}$ בנקודה $(0,0)$.

ידוע כי משוואת המישור המשיק בנקודה היא מהצורה

$$z = f_x \cdot x + f_y \cdot y + C$$

ועליה לעבור בנקודה.

נחשב את הנגזרות החלקיות:

$$f_x = \frac{1 \cdot e^{xy} - x \cdot ye^{xy}}{(e^{xy})^2}$$

עבור הנגזרת לפי y נשים לב כי

$$f = x \cdot e^{-xy}$$

ולכן

$$f_y = x \cdot (-x)e^{-xy} = -\frac{x^2}{e^{xy}}$$

נציב את הנקודה הנתונה ונקבל

$$f_x(0,0) = \frac{1-0}{1^2} = 1$$

$$f_y(0,0) = -\frac{0}{1} = 0$$

ולכן המישור המשיק הוא מהצורה

$$z = 1 \cdot x + 0 \cdot y + C$$

כעת, הנקודה על גרף הפונקציה מעל $(0,0)$ היא

$$\big(0,0,f(0,0)\big) = (0,0,0)$$

נציב במשוואת המישור המשיק ונקבל

$$0 = 0 + C$$

וסה"כ משוואת המישור המשיק היא

$$z = x$$

ג. מצאו את כל הפתרונות המרוכבים למשוואה $i \cdot z^5 = 1$.

נכפול בצמוד $-i$ ונקבל

$$z^5 = -i = cis\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

ולכן הפתרונות למשוואה הם

$$z_k = \sqrt[5]{1} cis\left(\frac{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{5}\right)$$

עבור $k = 0,1,2,3,4$

<u>שאלה 4</u> בכל אחד מן הסעיפים חשבו את האינטגרל הכפול $\iint_D f(x,y)dxdy$

א. כאשר $f(x,y)=\frac{x^2}{y}$ והתחום הוא $D=\{(x,y)|0\le x\le 1,1\le y\le e\}$.

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_0^1\int_1^e\frac{x^2}{y}dydx=\int_0^1 x^2\left(\int_1^e\frac{1}{y}dy\right)dx=\int_0^1 x^2[\ln|y|]_1^e dx=\int_0^1 x^2(\ln(e)-\ln(1))dx=$$

$$=\int_0^1 x^2dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

ב. כאשר $f(x,y)=x+1$ והתחום הוא $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$.

נעבור לקואורדינטות קוטביות, כיוון שהתחום הוא מעגל היחידה

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_0^1\int_0^{2\pi}(rcos(\theta)+1)\cdot rd\theta dr$$

נחשב את האינטגרל הפנימי

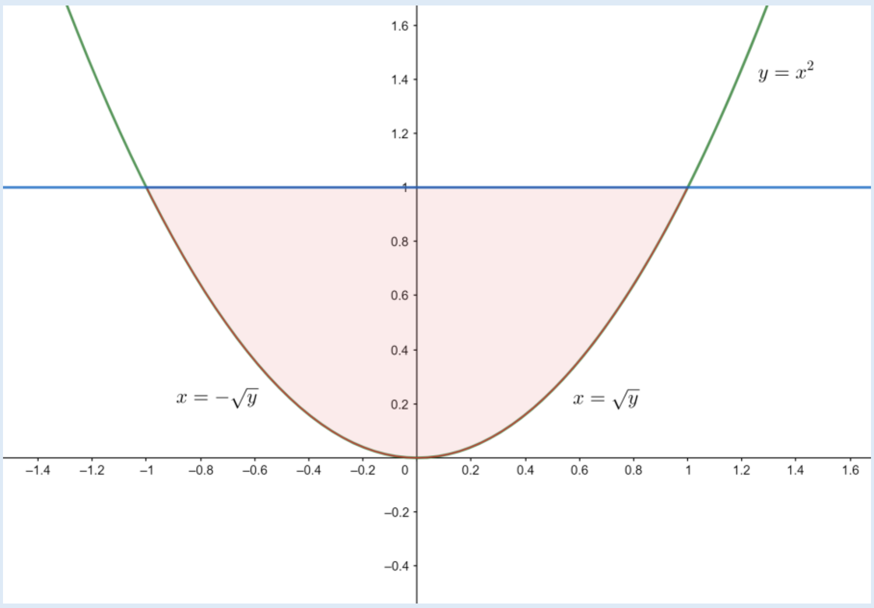
$$\int_0^{2\pi}(r^2\cos(\theta)+r)d\theta=[r^2\sin(\theta)+r\theta]_0^{2\pi}=r\cdot 2\pi$$

ולכן סה"כ נקבל

$$\int_0^1(r\cdot 2\pi)dr=\left[\frac{2\pi r^2}{2}\right]_0^1=\pi$$

ג. כאשר $f(x,y)=\sqrt{y}\cdot e^{(y^2)}$ והתחום הוא $D=\{(x,y)|-1\le x\le 1,x^2\le y\le 1\}$. רמז: החליפו סדר אינטגרציה.

נשרטט את התחום



ונראה כי

$$D=\left\{(x,y)|0\le y\le 1,-\sqrt{y}\le x\le\sqrt{y}\right\}$$

לכן סה"כ

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1}\sqrt{y}e^{y^2}dydx = \int_0^1\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\sqrt{y}e^{y^2}dxdy$$

כעת האינטגרל הפנימי הוא

$$\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\sqrt{y}e^{y^2}dx = \sqrt{y}e^{y^2}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}1\cdot dx = \sqrt{y}e^{y^2}[x]_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} = \sqrt{y}e^{y^2}\cdot 2\sqrt{y} = 2ye^{y^2}$$

ולכן סה"כ נקבל

$$\int_0^1 2ye^{y^2}dy = \begin{Bmatrix} t = y^2 \\ dt = 2ydy \end{Bmatrix} = \int_{0^2}^{1^2} e^t dt = [e^t]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$$