סדרות ב-$\mathbb{R}^n$

אורפז תורג'מן orpaz.biu@gmail.com
אתר דוד הארט: hl2.biu.ac.il

הגדרה

נורמה של וקטור $\|x\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

תכונות

* $\|\cdot\|:\mathbb{R}^n\to[0,\infty)$
* $\forall x\in\mathbb{R}^n: \|x\|\ge 0$
* $\|x\|=0 \iff x=0$
* $\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|$
* $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$

הגדרה

גבול של סדרה: תהי $\{x^m\}_{m=1}^{\infty}$ סדרה של וקטורים ב-$\mathbb{R}^n$,
$L\in\mathbb{R}^n$ ייקרא גבול של הסדרה, ויסומן $L=\lim_{m\to\infty}x^m$ או $x^m\to L$
אם"ם $\forall\varepsilon>0: \exists \bar{m}: \forall m\ge\bar{m}: \|x^m-L\|<\varepsilon$

המשפט המרכזי לגבול סדרה

תהי סדרה $x^m=(x_1^m,x_2^m,\dots,x_n^m)$, אזי $x^m\to L$ אם"ם לכל j: $x_j^m\to L_j$

דוגמאות

1) $\sin\frac{1}{n}\to 0$ וגם $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2^n} \overset{\text{לופיטל}}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{2^n\ln 2} \overset{\text{לופיטל}}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{2}{2^n\ln^2 2}=0$

לכן $(\sin\frac{1}{n},\frac{n^2}{2^n})\to 0$

2) $tg\frac{1}{n}\to 0$, אבל הסדרה $\cos(\frac{\pi}{2}n)$ מתבדרת כי יש לה יותר מגבול חלקי אחד. לכן $(tg\frac{1}{n},\cos(\frac{\pi}{2}n))$ מתבדר.

הגדרות

יהי $r>0$, $a\in\mathbb{R}^n$, כדור פתוח ב-$\mathbb{R}^n$ יהיה $B(a,r)=\{x\in\mathbb{R}^n \mid \|x-a\|<r\}$
וכדור סגור יהיה $\bar{B}(a,r)=\{x\in\mathbb{R}^n \mid \|x-a\|\le r\}$

[redacted]

אם $A\subset\mathbb{R}^n$, נאמר ש- $p\in\mathbb{R}^n$ היא נק' הגבול (הצטברות) של A

אם [redacted] מתקיים: $\forall\varepsilon>0: \exists x\in A: 0<\|x-p\|<\varepsilon$

הגדרה שקולה: $p\in \operatorname{Lim}A \iff \forall\varepsilon>0: \exists x\in A: x\in B(p,\varepsilon)\setminus\{p\}$

דוגמאות

1) $\operatorname{Lim}\underbrace{(0,1)}_{A}=[0,1]$

2) $A=\{0\}$ $\qquad \operatorname{Lim}A=\phi$

3) $A=(0,1)\cup\{2\}$ $\qquad \operatorname{Lim}A=[0,1]$

הערה

אם $a\in A$ אבל $a\notin\operatorname{Lim}A$ אז a נקודה מבודדת.

הגדרה

גבול של פונק' ב-$\mathbb{R}^n$:

תהי $f:A\to\mathbb{R}^m$, $A\subset\mathbb{R}^n$, $p\in\operatorname{Lim}A$. נאמר ש- $L\in\mathbb{R}^m$ היא הגבול של f ב-p אם:

$$\forall\varepsilon>0: \exists\delta>0: x\in A, 0<\|x-p\|<\delta \Rightarrow \|f(x)-L\|<\varepsilon$$

הגדרות שקולות:

1) $\forall\varepsilon>0: \exists\delta>0: x\in A\cap(B(p,\delta)\setminus\{p\}) \Rightarrow f(x)\in B(L,\varepsilon)$

2) $\forall\varepsilon>0: \exists\delta>0: f(A\cap(B(p,\delta)\setminus\{p\}))\subset B(L,\varepsilon)$

בעצם הגבול קיים אם עבור כל כדור שנבחר ב-$\mathbb{R}^m$ ברדיוס ε קטן ככל שיהיה קיים תחום (כדור) ב-A ברדיוס δ.

משפט היינה

$A\subset\mathbb{R}^n$, $f:A\to\mathbb{R}^m$, $p\in\operatorname{Lim}A$.

$L=\lim_{x\to p} f(x) \iff$ לכל סדרה $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$, $x^n\in A\setminus\{p\}$ עבורה $\lim_{n\to\infty} x^n=p$ מתקיים גם $L=\lim_{n\to\infty} f(x^n)$

טכניקות לחישוב גבולות

1) מציאת הגבול ע"י הצבה, למשל:

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{x^2+y^2}{3x+2y-xy} = \frac{5}{9}$$

2) משפט הסנדוויץ', למשל:

$0\le\left|\frac{x^2y}{x^2+y^4}\right|\le\left|\frac{x^2y}{x^2}\right|=|y|\to 0$ ולכן

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^4}=0$$

3) הפרכת קיום הגבול ע"י בחינת מסלולים שונים:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

מהו

נקח מסלול $x=y$:

$$\lim_{x=y\to 0} \frac{y^2}{x^2+y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$x=2y$:

$$\lim_{x=2y\to 0} \frac{2y^2}{5y^2}=\frac{5}{2}$$

$\neq$

ולכן מתבדר

4) הבאת הפונק' לכדי פונק' של משתנה אחד אחד או לפונק' שגבולה ידוע

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,1,2)} \frac{\sin(x(y^2+z^2))}{xy^2}=\lim_{(x,y,z)\to(0,1,2)} \frac{\sin(x(y^2+z^2))}{x(y^2+z^2)}\cdot\frac{x(y^2+z^2)}{xy^2}=1\cdot 5=5$$

הגדרה - גבולות חוזרים

תהי נתונה פונק' $u=f(x,y)$ המוגדרת בסביבה מנוקבת של (x_0,y_0)

לכל y קבוע נחשב $\varphi(y)=\lim_{x\to x_0} f(x,y)$

נעבור לגבול $\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)=\lim_{y\to y_0}\varphi(y)$

נקרא גבול חוזר.

באותו אופן ניתן להגדיר גבול חוזר כאשר x קבוע.

תרגיל

חשב את הגבולות החוזרים והגבול הכפול של הפונק' $f(x,y)=y\cdot\sin\frac{1}{x-1}$

כאשר $(x,y)\to(1,0)$

פתרון

$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 1} y\cdot\sin\frac{1}{x-1}=$ לא קיים

$$\lim_{x\to 1}\lim_{y\to 0} y\cdot\sin\frac{1}{x-1}=0$$

גבול כפול:

$$0\le\left|y\cdot\sin\frac{1}{x-1}\right|\le|y|\to 0$$

לכן הגבול הכפול הוא $\lim_{(x,y)\to(1,0)} y\cdot\sin\frac{1}{x-1}=0$

מסקנה

אם הגבול הכפול קיים הוא חייב להתלכד עם כל גבול חוזר שקיים.

תרגיל

חשב את הגבולות החוזרים והגבול הכפול של הפונק':

$$f(x,y)=\frac{x^2y}{x^2+y^2} \qquad (x,y)\to(0,0)$$

פתרון

$$\lim_{x\to0}\lim_{y\to0}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=\lim_{x\to0}0=0$$

$$\lim_{y\to0}\lim_{x\to0}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=\lim_{y\to0}0=0$$

נחשב ארק הגבול הכפול: $0\le\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|\le\left|\frac{x^2y}{x^2}\right|=|y|\to0$

לכן הגבול הכפול שווה וקיימים.

משפט

הקשר בין גבול כפול וגבולות חוזרים:

אם מתקיימים התנאים הבאים:

1) קיים $L=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)$

2) לכל y מסביבת y_0 קיים $\lim_{x\to x_0}f(x,y)$

אזי $\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0}f(x,y)$ קיים ושווה ל-L (וכנ"ל הפוך)

פונקציות וקבוצות

הגדרה

אומרים שעל קבוצה $\mathbb{R}^n \supseteq M$ מוגדרת פונק' אם לכל $M \ni x$ מתאים מספר ממשי יחיד לפי חוק הנתון מראש, ומסמנים $u=f(x)$.
הקבוצה M תקרא תחום ההגדרה של הפונק' ונסמן $f: M \to \mathbb{R}$.
אוסף כל ערכי הפונק' יקרא טווח.

תרגיל

* מצא את תחום ההגדרה והטווח של $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-\sum_{i=1}^{n} x_i^2}}$

נדרוש $1-\sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0$ לכן ת"ה הוא כדור פתוח שמרכזו ב-0 ורדיוס 1.

הטווח הוא $[1,\infty)$

* אותו דבר עבור $f(x,y,z)=\arccos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$

ת"ה: $-1\le\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\le 1$; $x\ne 0$ או $y\ne 0$

טווח: $[0,\pi]$

הגדרות

* הנק' $\mathbb{R}^n \ni x_0$ תקרא נקודה פנימית של הקבוצה $\mathbb{R}^n \supseteq M$ אם קיים $\varepsilon>0$ כך ש-$B(x_0,\varepsilon)\subseteq M$. x_0 תקרא נקודה חיצונית של M אם קיים $\varepsilon>0$ כך ש-$B(x_0,\varepsilon)\subseteq M^c$. נקודה גבולית היא $\mathbb{R}^n \supseteq M \ni x_0$
* אם בכל סביבת-ε של x_0 יש נק' ששייכות ל-M ונק' שלא שייכות לה נקודה גבולית תקרא נקודת שפה
* הקבוצה $\mathbb{R}^n \supseteq M$ שכל נקודותיה הן פנימיות תקרא קבוצה פתוחה.

למשל: עבור הקבוצה $\{(x,y): y=x^2\}$ כל נק' שבה היא נק' שפה.
או עבור $\{(x,y): -2\le x\le 2,\ 1< y\le 2\}$ נק' שפה הן: $(x,2)$ $-2\le x\le 2$
$(2,y)$ $1< y\le 2$

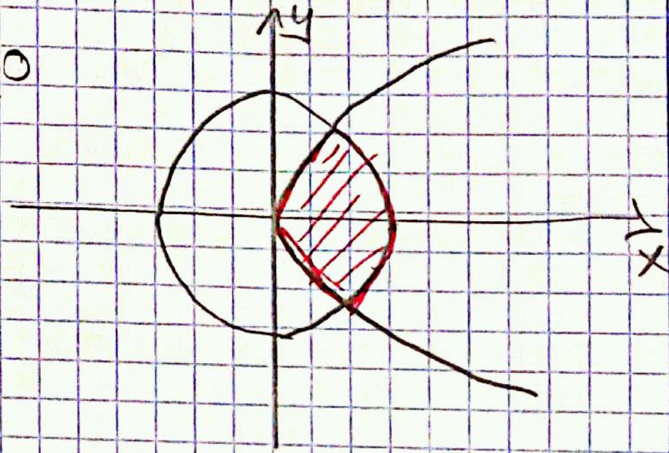
* הקבוצה M חסומה אם קיים כדור בעל רדיוס סופי המכיל אותה

תרגיל

צייר את הקבוצות הבאות וקבע לגבי כל אחת האם פתוחה/סגורה/לא פתוחה ולא סגורה/האם חסומה:

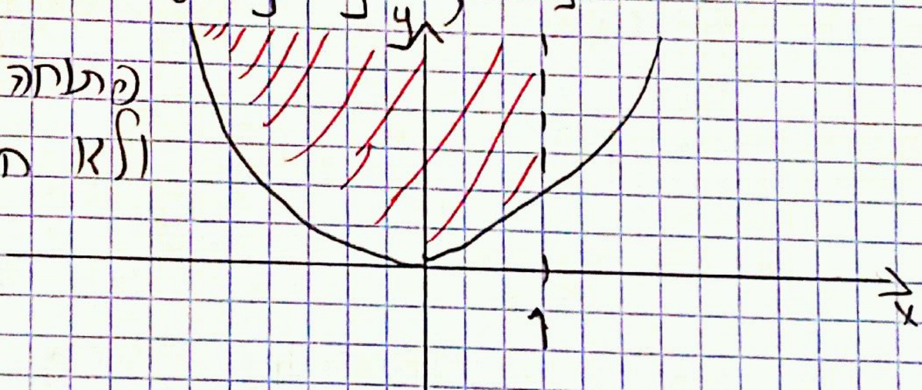
1) $\{(x,y): x^2+y^2\le 4,\ x\ge y^2\}$

סגורה וחסומה



2) $\{(x,y): y>x^2,\ x<1\}$

פתוחה ולא חסומה



רציפות

הגדרה

תהי $u=f(\vec{x})$ מוגדרת בתחום D נאמר שהיא רציפה בנק' $x^0\in D$ אם $\lim\limits_{x\to x^0} f(x)=f(x^0)$

הגדרה שקולה:

הפונק' $u=f(x)$ רציפה ב- $x^0\in D$ אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל ה-x-ים המקיימים $\|x-x^0\|<\delta$ מתקיים $|f(x)-f(x^0)|<\varepsilon$

דוגמה

בדוק רציפות בנק' $(0,0,0)$ של הפונק'

$$f(x,y,z)=\begin{cases}\frac{x^3+y^3+z^3}{x^2+y^2+z^2} & (x,y,z)\neq(0,0,0)\\ 0 & else\end{cases}$$

פתרון

נחשב $\lim\limits_{(x,y,z)\to 0} f(x,y,z)$:

$$0\leq\left|\frac{x^3+y^3+z^3}{x^2+y^2+z^2}\right|\leq\left|\frac{x^3}{x^2+y^2+z^2}\right|+\left|\frac{y^3}{x^2+y^2+z^2}\right|+\left|\frac{z^3}{x^2+y^2+z^2}\right|\leq|x|+|y|+|z|\to 0$$

$\Downarrow$

הפונק' רציפה

תרגיל

האם ניתן להגדיר את הפונק' הבאה בנק' $(0,0)$ כך שתהיה רציפה בנק' זו:

$$f(x,y)=\frac{y^2}{y^2+x^4}$$

פתרון

עבור המסלול $y=x$: $\lim\limits_{y=x\to 0} f(x,y)=1$

כמו כן: $\lim\limits_{y=x^2\to 0} f(x,y)=\frac{1}{2}$

ולכן אין גבול ב- $(0,0)$ ולכן בכל מקרה לא ניתן להגדיר הפונק' כרציפה

תרגיל בדוק את רציפות הפונק' בנק' $(0,0)$

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2+x^3+y^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & else\end{cases}$$

פתרון

הגבול משתנה בהתאם ל-k ולכן לא קיים $\Longleftarrow$ $\lim_{y=kx\to 0} f(x,y)=\frac{1}{k^2+1}$

תרגיל

האם ניתן להגדיר את הפונק' הבאה ב-$(0,0)$ כך שתהיה רציפה בנק' זו:

$$f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{\sin(x^2+y^2)}$$

נסמן $r=x^2+y^2\to 0$ לכן $\lim_{r\to 0} f(x,y)=1$

ולכן אפשר להגדיר כרציפה

תרגיל

הוכח שאם $f(x,y)$ רציפה ב-D לפי x ו-y ביחד אז היא רציפה לפי x ולפי y.

הוכחה

$f(x,y)$ רציפה ב-D $\Leftarrow$ היא רציפה בכל נק' $(x_0,y_0)\in D$, כלומר מתקיים

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$$

כלומר שאם $\|(x,y)-(x_0,y_0)\|<\delta$ אז $|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon$

כעת נקח $\|x-x_0\|<\delta_1$ נרצה להוכיח $|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon$

עבור y קבוע $\Leftarrow$ נבחר $y=y_0$ ונקבל הנדרש.

לכן f רציפה לפי x, באותו אופן רציפה לפי y.

רציפות במידה שווה

הגדרה

הפונק' $u=f(x)$ תקרא רציפה במ"ש בתחום D אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ התלוי ב-ε בלבד כך שלכל שתי נק' x',x'' המקיימות $|x'-x''|<\delta$ מתקיים $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$

תרגיל

הוכח: הפונק' $u=\arcsin\frac{x}{y}$ רציפה בתחום $D=\{(x,y):|x|\le|y|, y\neq 0\}$ אך לא רציפה שם במ"ש.

פתרון

בת"ד $\frac{x}{y}$ רציפה, arcsin רציפה $\Leftarrow$ $\arcsin\frac{x}{y}$ רציפה (כי משפט

הרכבה של פונק' רציפות רציפה + אריתמטיקה)

נראה כי הפונק' אינה רציפה במ"ש:

נגדיר סדרה של נקודות $v_n=\left(\frac{1}{n},-\frac{1}{n}\right)$ $u_n=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)$

$$\|u_n-v_n\|=\frac{2}{n}\to 0$$

$$\|f(u_n)-f(v_n)\|=\sqrt{(\arcsin 1-\arcsin(-1))^2}=\pi\not\to 0$$

ולכן אין רציפות במ"ש.

תרגיל

הוכח: אם הפונק' $u=f(x,y)$ המוגדרת בתחום D רציפה לפי x ומקיימת את תנאי ליפשיץ לפי y (כלומר $|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le A|y_1-y_2|$ כאשר $(x,y_1),(x,y_2)\in D$). אזי $f(x,y)$ רציפה ב-D.

הוכחה

צ"ל ש- $f(x,y)$ רציפה בכל נק' $(x_0,y_0)\in D$, כלומר שלכל (x_0,y_0) המקיימים $\|(x,y)-(x_0,y_0)\|<\delta$ מתקיים $\|f(x,y)-f(x_0,y_0)\|<\varepsilon$

ובכן $|f(x,y)-f(x_0,y_0)|\le|f(x,y)-f(x,y_0)|+|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|\le$

$$\le A|y-y_0|+|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)| \quad (*)$$

נתון כי f רציפה לפי x כלומר לכל ε_1, δ_1 כך ש- $|x-x_0|<\delta_1$ מתקיים ש-: $|f(x,y)-f(x_0,y)|<\varepsilon_1$. נקח $\varepsilon_1=\varepsilon/2$

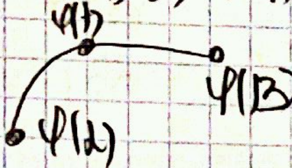
כעת נקח $\delta=\min\left(\frac{\varepsilon}{2A},\delta_1\right)$, $|y_0-y|$

ובחזרה ל-(*): $\|f(x,y)-f(x_0,y_0)\|\le A\cdot\frac{\varepsilon}{2A}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$

קבוצות ופונקציות ב-$\mathbb{R}^n$

הגדרה

אוסף הנקודות $\{M\}$ בעלות קואורדינטות $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ שהן פונק' רציפות של הפרמטר $\alpha \le t \le \beta$: $x_i = \varphi_i(t)$
נקרא קו רציף ב-$\mathbb{R}^n$



דוגמאות

א. הקבוצה $\{(x,y): x=\cos t, y=\sin t, 0\le t\le 2\pi\}$ היא קו רציף ב-$\mathbb{R}^2$ שנקרא מעגל היחידה.

ב. הקבו' $\{(x,y): x=t, y=f(t), a\le t\le b\}$ כאשר $f(t)$ היא פונק' רציפה ב-$[a,b]$, היא קו רציף.

הגדרה

נאמר ששתי נקודות $M_1(x_1', x_2', \ldots, x_n')$ $M_2(x_1'', x_2'', \ldots, x_n'')$ ניתנות לחיבור ע"י קו רציף ↓ אם קיים קו רציף כך שמתקיים:

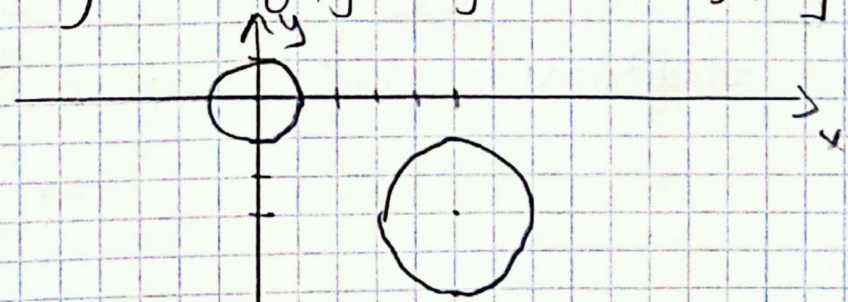
$x_1' = \varphi_1(\alpha)$, $x_2' = \varphi_2(\alpha)$, ..., $x_n' = \varphi_n(\alpha)$

$x_1'' = \varphi_1(\beta)$ $x_2'' = \varphi_2(\beta)$ $x_n'' = \varphi_n(\beta)$

הקבוצה D תקרא קשירה אם ניתן לחבר כל שתי נקודות בה ע"י קו רציף שנמצא כולו בתוך הקבוצה.

דוגמא

הקבוצה $D := \{(x,y): x^2+y^2<1 \vee (x-5)^2+(y+3)^2<4\}$ אינה קשירה כי



הגדרה קב' קשירה נקראת תחום.

משפט ערך הביניים

תהי הפונק' $u=f(M)$ רציפה בתחום קשיר D. יהיו $A, B\in D$.
לכל m שנמצא בין $f(A), f(B)$ קיימת $c\in D$ כך ש-$f(c)=m$.

תרגיל

מצא טווח של הפונק' $g(x,y,z)=\frac{xy+xz+yz}{x+y+z}$

כאשר $x,y,z>0$ ו- $xyz=1$

פתרון

ניקח מסלול $z=\frac{1}{x^2}$ $x=y$:

$$\lim_{x\to 0} g(x,x,\tfrac{1}{x^2})=\lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{x^2+\frac{2}{x}}{2x+\frac{1}{x^2}}}_{f(x)}$$

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to 0} f(x)=0\\&\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty\end{aligned}\right\} \Rightarrow f(x)\in(0,\infty)$$

קיבלנו טווח מקסימלי כי תמיד $g(x,y,z)>0$

ו-g תקבל כל נק' ב-$(0,\infty)$ מרציפות של הבינים.

$\Downarrow$

הטווח היא $(0,\infty)$.

משפט ויירשטראס

אם פונק' רציפה בתחום חסום וסגור D אז היא חסומה.

הערה:

משפט ויירשטראס נותן לנו תנאי מספיק אך לא הכרחי.

דוגמה

(א) $f(x,y)=\frac{1}{x+y}$ המוגדרת ב- $[0,1]\times(0,1]$. קבו' זו חסומה אך אינה סגורה. כמו כן $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{x+y}=\infty$

(ב) $f(x,y)=c$ קבועה ב-$\mathbb{R}^2$ שאינה חסומה אבל רציפה $f(x,y)$
איננה חסומה,

נגזרות חלקיות

הגדרה

תהי $z=f(x,y)$ מוגדרת בסביבת (x_0,y_0). אם קיים הגבול

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$$ וסופי

נאמר ש-f גזירה חלקית לפי x ב-(x_0,y_0), הגבול נקרא הנגזרת החלקית לפי x ב-(x_0,y_0) ונסמנו $f'_x(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$

תרגיל

חשב את הנגזרות החלקיות של $f(x,y)=x^y$:

$f'_x(x,y)=yx^{y-1}$

$f'_y(x,y)=x^y\cdot\ln x$

תרגיל

תהי

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3+y^4}{x^2+y^2} & (x,y)\neq\vec{0}\\ 0 & else\end{cases}$$

א. חשב את הנגזרות החלקיות בראשית.

ב. חשב את הנגזרות החלקיות מחוץ לראשית.

ג. האם הנגזרות החלקיות רציפות בראשית?

פתרון

א.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h}{h}=1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h^2}{h}=0$$

ב. $(x,y)\neq\vec{0}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{3x^2(x^2+y^2)-2x(x^3+y^4)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^4+3x^2y^2-2xy^4}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{4y^3(x^2+y^2)-2y(x^3+y^4)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{4y^3x^2+2y^5-2yx^3}{(x^2+y^2)^2}$$

ג. עבור $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$: נראה שלא קיים גבול ב-$\vec{0}$:

נקח מסלול $y=2x$: הגבול הוא

$$\lim_{x\to0}\frac{28x^4-4x^5}{25x^4}=\lim_{x\to0}\frac{28-4x}{25}=\frac{28}{25}$$

לכן לא רציפה (כי אם קיים גבול הוא יהיה $\frac{28}{25}\neq1$)

עבור $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$: נקח המסלול $y=x$

$$\lim_{x\to0}\frac{6x^5-2x^4}{4x^4}=\lim_{x\to0}\frac{6x-2}{4}=-\frac{1}{2}\neq0$$

ולכן לא רציפה.

תרגיל

חשב את הנגזרות החלקיות של $u=xe^{yz}+\ln(xyz)$

פתרון

$$u'_x=e^{yz}+\frac{1}{xyz}\cdot yz=e^{yz}+\frac{1}{x}$$

$$u'_y=xze^{yz}+\frac{1}{y}$$

$$u'_z=xye^{yz}+\frac{1}{z}$$

דיפרנציאביליות

הגדרה

תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, ונניח $a\in\mathbb{R}^n$. נאמר ש-f דיפרנציאבילית ב-a אם:

f מוגדרת בסביבת a, ו- $f(a+h)=f(a)+L(h)+\varepsilon(h)\cdot\|h\|$

כאשר $L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ העתקה לינארית, ו- $\varepsilon:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ המקיימת $\lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=\vec{0}$

במקרה זה נאמר ש-f היא $o(h)=o(\|h\|)=\varepsilon(h)\cdot\|h\|$

משפט

f דיפרנציאבילית $\Leftarrow$ כל הנגזרות החלקיות קיימות, ואז:

$$L(h)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a)\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_1\\ \vdots\\ h_n\end{pmatrix}$$

דוגמה

$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ שהיא דיפרנציאבילית תיראה כך:

$$f(a+h)=f(a)+\underbrace{f'_{x_1}(a)h_1+\dots+f'_{x_n}(a)\cdot h_n}_{L(h)}+\varepsilon(h)\cdot\|h\|$$

משפט

אם קיימות כל הנגזרות החלקיות ב-a והן רציפות אז f דיפרנציאבילית ב-a.

דוגמה

עבור $f(x,y,z)=(x+y,yz)$; מט' היעקוביאן היא $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&z&y\end{pmatrix}$

לכן הדיפרנציאל ב-(a_1,a_2,a_3) יהיה:

$$L(h)=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&a_3&a_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_1\\h_2\\h_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}h_1+h_2\\a_3h_2+a_2h_3\end{pmatrix}$$

לכן

$$f(a_1+h_1,a_2+h_2,a_3+h_3)=f(a_1,a_2,a_3)+L(h)+o(\|h\|)=$$

$$=(a_1+a_2,a_2a_3)+(h_1+h_2,a_3h_2+a_2h_3)+o(\|h\|)$$

$$L(h):=df_a(h)$$

תרגיל

בדוק דיפרנציאביליות של $f(x,y)$ בנק' $(0,0)$:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{y\sin x}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

פתרון

$$f'_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=0$$

$$f'_x(x,y)=\frac{y\cos x\cdot(x^2+y^2)-2xy\sin x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f'_x(x,y)=\frac{y\cos x}{x^2+y^2}-\frac{2xy\sin x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$0\le\left|\frac{y\cos x}{x^2+y^2}\right|\le\left|\frac{y}{x^2+y^2}\right|\le\left|\frac{y}{y^2}\right|\to 0$$

לא רציף
$\Downarrow$
לא דיפרנציאבילי

דרך נוספת:

$$f(0+h,0+k)=f(h,k)=f(0,0)+\varepsilon(h,k)\|(h,k)\|$$

$$\varepsilon(h,k)\sqrt{h^2+k^2}=\frac{k\sin h}{h^2+k^2}$$

$$\lim_{\substack{(h,k)\to 0\\ h=k}}\varepsilon(h,k)=\lim_{h\to 0}\underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{1}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}h}=\infty$$

ולכן לא דיפרנציאבילי

דיפרנציאביליות ונגזרות

הגדרה

נאמר ש- $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ דיפרנציאבילית ב- $a\in\mathbb{R}^n$ אם:

1) f מוגדרת בסביבת a

2) קיימות $f(a+h)=f(a)+L(h)+\varepsilon(h)\|h\|$

באשר $L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ לינ', $\varepsilon:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ כך ש- $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$

תרגיל

בדוק את הדיפרנציאביליות של הפונק'

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} & (x,y)\neq\vec{0} \\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

פתרון

נחשב את הנגזרות החלקיות של הפונק' ב- $\vec{0}$

לופיטל

$$f'_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1/h}{e^{1/h^2}}=\lim_{\substack{t\to\infty\\ t=\frac{1}{h}}}\frac{t}{e^{t^2}}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{2te^{t^2}}=0$$

באותו אופן $f'_y(0,0)=\lim\limits_{k\to 0}\ldots=0$

בנוסף $L(h,k)=(0,0)\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}=0$

לכן אם f דיפרנציאבילית אמור להתקיים

$$f(h,k)=\varepsilon(h,k)\sqrt{h^2+k^2}$$

לכן $$\varepsilon(h,k)=\frac{e^{-1/h^2+k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$t=\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$\lim_{(h,k)\to\vec{0}}\varepsilon(h,k)=\lim_{(h,k)\to\vec{0}}\frac{t}{e^{t^2}}=0$$

$f\Rightarrow$ אכן דיפרנציאבילית

תרגיל

בדוק את הדיפרנציאביליות של הפונק'

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq\vec{0}\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

דיפרנציאביליות ונגזרות

תזכורת

נאמר ש- $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ דיפרנציאבילית ב- $a\in\mathbb{R}^n$ אם:

א. f מוגדרת בסביבת a

ב. $f(a+h)=f(a)+L(h)+\varepsilon(h)\|h\|$

באשר $L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ ה"ל, $\varepsilon:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ כך ש- $\lim_{h\to0}\varepsilon(h)=0$

תרגיל

בדוק את הדיפרנציאביליות של הפונק'

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} & (x,y)\neq\vec{0}\\ 0 & else\end{cases}$$

פתרון

נחשב את הנגזרות החלקיות של הפונק' ב-$\vec{0}$

$$f'_x(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}=\frac{1/h}{e^{1/h^2}}=\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^{t^2}}\overset{\text{לופיטל}}{=}\lim\frac{1}{2te^{t^2}}=0 \qquad t=\frac{1}{h}$$

באופן דומה $f'_y(0,0)=\lim_{h\to0}\dots=0$

בנית $L(h,k)=(0,0)\binom{h}{k}=0$

לכן אם f דיפרנציאבילית אמור להתקיים

$$f(h,k)=\varepsilon(h,k)\sqrt{h^2+k^2}$$

לכן $$\varepsilon(h,k)=\frac{e^{-1/(h^2+k^2)}}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$t=\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$\lim_{(h,k)\to\vec{0}}\varepsilon(h,k)=\lim_{(h,k)\to\vec{0}}\frac{t}{e^{t^2}}=0$$

$f\Rightarrow$ אכן דיפרנציאבילית

תרגיל

בדוק את הדיפרנציאביליות של הפונק'

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq\vec{0}\\ 0 & else\end{cases}$$

פתרון

נבדוק את הנגזרות החלקיות ב-$(0,0)$

$$f'_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=0$$

$$f'_y(0,0)=0 \Rightarrow L(h,k)=0$$

אם מתקיימת דיפרנציאביליות אמור להתקיים

$$\frac{hk}{h^2+k^2}=\varepsilon(h,k)\sqrt{h^2+k^2}$$

לכן $\varepsilon(h,k)=\frac{hk}{(h^2+k^2)^{1.5}}$. נראה ש- $\lim_{(h,k)\to(0,0)}\varepsilon(h,k)$ אינו קיים.

ניקח מסלול $k=h$:

$$\lim_{h=k\to 0}\varepsilon(h,h)=\infty$$

לכן אין דיפרנציאביליות.

נגזרת מכוונת

הגדרה

יהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $u,a\in\mathbb{R}^n$, $\|u\|=1$. אזי

$$\frac{\partial f}{\partial u}(a)=\lim_{t\to 0}\frac{f(a+tu)-f(a)}{t}$$

זו הנגזרת המכוונת של f בכיוון u בנק' a.

תרגיל

מצא את הנגזרת המכוונת של הפונק' f בנק' a לפי הכיוון l.

$f(x,y)=x\sin(x+y)$ $\quad a=(-1,1)$ $\quad l=(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})$

פתרון

$$\|l\|=\sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2+\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}=\pi\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$u=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ מנורמל

$$\frac{\partial f}{\partial u}(1,-1)=\lim_{t\to 0}\frac{f\left((1,-1)+t\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)-f(1,-1)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(\sqrt{2}t)}{t\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)=\sqrt{2}$$

משפט

אם f דיפרנציאבילית ב-a אזי לכל $\|u\|=1$ מתקיים

$$\frac{\partial f}{\partial u}(a)=df_a(u)=L(u)$$

$\ldots = 2(-1)+\ldots$

תרגיל

הראו כי $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq 0\\ 0 & else\end{cases}$ אינה דיפרנציאבילית ב-$(0,0)$

פתרון

ראשית, מתקיים ש $f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$

אם f הייתה דיפרנציאבילית ב-$(0,0)$ אז לפי המשפט הנ"ל כל וקטור יחידה $u=(\cos\theta,\sin\theta)$ מקיים את הדיפרנציאל

$$df_{(0,0)}(u)=(f_x\ \ f_y)\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}=0$$

מצד שני

$$\frac{\partial f}{\partial u}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(a+tu)-f(a)}{t}=\ldots=\lim_{t\to 0}\cos^2\theta\sin\theta\neq 0$$

בסתירה למשפט. לכן f אינה דיפרנציאבילית ב-$(0,0)$.

הגדרה

תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, נגדיר $\nabla f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ ע"י

$$\nabla f(a)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a),\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)$$

הוא וקטור הנגזרות החלקיות של הפונק', ונקרא הגרדיאנט של f ב-a.

משפט

אם $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ דיפרנציאבילית ב-a אז: $df_a(h)=(\nabla f(a))\cdot h$

מסקנה

אם $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ דיפרנציאבילית ב-a אז לכל וקטור יחידה $u\in\mathbb{R}^n$: $\frac{\partial f}{\partial u}(a)=df_a(u)=(\nabla f(a))\cdot u$

דוגמה

נחזור לדוגמה הראשונה $f(x,y)=x\sin(x+y)$. קודם חישבנו

$$u=\left(\frac{-\sqrt2}{2},\frac{-\sqrt2}{2}\right)\quad \frac{\partial f}{\partial u}(1,-1)=-\sqrt2$$

$$(\nabla f(1,-1))\cdot\left(\frac{-\sqrt2}{2},\frac{-\sqrt2}{2}\right)=-\sqrt2=\frac{\partial f}{\partial u}(1,-1)$$

כנדרש!

תרגיל

הוכח שהנגזרת המכוונת של: $u=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$

בנק' $u(x,y,z)$ כשהכיוון של u לראשית שווה ל- $-\frac{2u}{r}$

כאשר $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

הוכחה

$$l=(0,0,0)-(x,y,z)=(-x,-y,-z)$$

$$\hat{l}=\frac{l}{\|l\|}=-\frac{(x,y,z)}{r}$$

$$\frac{\partial u}{\partial l}(x,y,z)=\lim_{t\to 0}\frac{u((x,y,z)+t\cdot\hat{l})-u(x,y,z)}{t}=\dots=\lim_{t\to 0}\dots=-2\cdot\frac{u}{r}=-\frac{2u}{r}$$

משפט - כלל השרשרת

תהי הפונק' $u=f(x,y,z)$ בעלת נגזרות חלקיות f'_x,f'_y,f'_z רציפות. ותהיינה $x(t),y(t),z(t)$ גזירות, אזי קיימת הנגזרת לפונק' $\frac{du}{dt}$ ומתקיים $\frac{du}{dt}=f'_x\cdot\frac{dx}{dt}+f'_y\cdot\frac{dy}{dt}+f'_z\cdot\frac{dz}{dt}$

תרגיל

חשב לפונק' $\frac{du}{dt}$ $u=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq\vec{0}\\ 0 & \text{else}\end{cases}$ כאשר $x=2t$, $y=t$.

פתרון

לפי כלל השרשרת:

$$\frac{du}{dt}=\frac{2xy(x^2+y^2)-2x^3y}{(x^2+y^2)^2}\cdot 2+\frac{x^2(x^2+y^2)-2y^2x^2}{(x^2+y^2)^2}\cdot 1=\frac{4}{5}$$

תרגיל

תהי $f(x,y)$ בעלת נגזרות חלקיות רציפות בכל המישור.

$f'_x(-3,6)=2$ $\quad f'_y(-3,6)=1$

נקח $x=u^2-v^2$ $\quad y=u^2vw$

נגדיר $\varphi(u,v,w)=f(u^2-v^2,u^2vw)$

חשבו $\frac{\partial\varphi}{\partial u},\frac{\partial\varphi}{\partial v},\frac{\partial\varphi}{\partial w}$ בנק' $(1,2,3)$

פתרון

מכלל השרשרת

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}=2\cdot 2u+1\cdot 2u\cdot v\cdot w=16$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}=2(-4)+1\cdot3=-5$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial w}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial w}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial w}=2\cdot0+1\cdot2=2$$

$$\Downarrow$$

$$\nabla\psi(1,2,3)=(16,-5,2)$$

תרגיל

הוכח שהפונק' $z=\varphi(x^2-y^2)$ כאשר $\varphi(t)$ גזירה מקיימת

את המשוואה $y\cdot\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)+x\cdot\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0$

פתרון

$\varphi(t)$ גזירה $\Rightarrow$ φ דיפרנציאבילית + גזירה

$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x}=\varphi'_t\cdot2x$ $\qquad$ $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial\varphi}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial y}=\varphi'_t\cdot(-2y)$

ואכן מתקיימת המשוואה הנדרשת!

נגזרות חלקיות מסדר גבוה

הגדרה

תהי $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ נגזרת חלקית לפי x_i של הפונק' $u=f(x_1,\dots,x_n)$ המוגדרת בתחום D. אם u'_{x_i} היא פונק' מוגדרת בכל נק' של D, אזי היא פונק' של n משתנים. לכן ניתן להגדיר (אם הן קיימות) את הנגזרת שלה לפי x_j ונקבל נגזרת חלקית מסדר שני של u. והסימון יהיה: $\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\partial x_i}=f^{(2)}_{x_i,x_j}=f^{(2)}_{ij}$

אם $i\neq j$ אזי הנגזרת $f^{(2)}_{ij}$ נקראת נגזרת מעורבת מסדר שני.

דוגמה

מצא את הנגזרות החלקיות מסדר שני של $u=\ln(x^2+y^2)$

$u'_x=\frac{2x}{x^2+y^2}$ $\qquad$ $u'_y=\frac{2y}{x^2+y^2}$

$u''_{xx}=\frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$ $\qquad$ $u''_{yy}=\frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$

$u''_{xy}=u''_{yx}=-\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2}$

תרגיל

יהי $u=x^2y^3z^4$, חשב $u^{(3)}_{x^3},\ u^{(4)}_{x^2yz},\ u^{(4)}_{xyzx}$

פתרון

$u'_x=2xy^3z^4$

$u''_{xx}=2y^3z^4$ $\qquad u^{(3)}_{x^2y}=6y^2z^4$ $\qquad u''_{xy}=6xy^2z^4$

$u^{(3)}_{x^3}=0$ $\qquad u^{(3)}_{x^2yz}=24y^2z^3$ $\qquad u'''_{xyz}=24xy^2z^3$

$u''''_{xyzx}=24y^2z^3$

משפט

אם הפונק' $f(x,y)$ מוגדרת בתחום D בעלת נגזרות חלקיות f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx} ורציפות בסביבות הנקודה $M\in D$, אז בנק' M:

$$f_{xy}(M)=f_{yx}(M)$$

נגזרות ודיפרנציאביליות

תרגיל

נתונה הפונק' $u=\frac{1}{r}$ כאשר $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. חשב את הלפלסיאן $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$

פתרון

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{1}{r^2}\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=-\frac{x}{r^3}\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{y}{r^3}\qquad \frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{z}{r^3}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{r^3}\right)=\underbrace{-\frac{1}{r^3}}_{\frac{\partial}{\partial x}}+\underbrace{\frac{3x}{r^4}\cdot\frac{x}{r}}_{\frac{\partial}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3x^2}{r^5}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3y^2}{r^5}\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3z^2}{r^5}\Rightarrow \Delta u=0$$

תרגיל

רשום את הלפלסיאן $\Delta u=u_{xx}+u_{yy}$ בקואורדינטות קוטביות

$x=\rho\cos\varphi \qquad y=\rho\sin\varphi$

פתרון

נהפוך את φ, ρ למשתנים של x,y:

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}\qquad \varphi=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

$$\rho'_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\cos\varphi\qquad \rho'_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\sin\varphi$$

$$\varphi'_x=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=-\frac{y}{x^2+y^2}=-\frac{\sin\varphi}{\rho}$$

$$\varphi'_y=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2}=\frac{\cos\varphi}{\rho}$$

$$\rho''_{xx}=\frac{\partial}{\partial x}(\cos\varphi)=\underbrace{\frac{\partial(\cos\varphi)}{\partial\rho}\cdot\frac{\partial\rho}{\partial x}}+\frac{\partial(\cos\varphi)}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-\sin\varphi\cdot\varphi'_x=\frac{\sin^2\varphi}{\rho}$$

$$\rho''_{yy}=\frac{\partial(\sin\varphi)}{\partial y}=0+\cos\varphi\cdot\varphi'_y=\frac{\cos^2\varphi}{\rho}$$

$$\varphi_{xx}=0\qquad \varphi_{yy}=0\qquad \varphi_{xy}=\varphi_{yx}=\frac{-\sin^2\varphi+\cos^2\varphi}{\rho^2}$$

$$\rho_{xy}=\frac{\sin\varphi\cdot\cos\varphi}{\rho}=\rho_{yx}$$

נשתמש בהחלפת משתנים:

החלפת משתנים

נתונה הפונק' $z=f(x,y)$. נעבור למשתנים הבאים

$$s=s(x,y) \quad t=t(x,y)$$

אזי:

$$\begin{cases} z_x = z_s \cdot s_x + z_t \cdot t_x \\ z_y = z_s \cdot s_y + z_t \cdot t_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_{xx} = z_{ss} \cdot s_x^2 + z_{tt} \cdot t_x^2 + 2 z_{st} s_x t_x + z_s s_{xx} + z_t t_{xx} \\ z_{yy} = z_{ss} \cdot s_y^2 + z_{tt} \cdot t_y^2 + 2 z_{st} \cdot s_y \cdot t_y + z_s \cdot s_{yy} + z_t \cdot t_{yy} \end{cases}$$

ואז מציבים את התרגיל.

דיפרנציאל מסדר גבוה

הגדרה

תהי $u=f(x,y)$ רציפה ובעלת נגזרות חלקיות רציפות עד סדר n בסביבת הנק' M_0.

הדיפרנציאל הוא: $du=f_x dx+f_y dy$

נגדיר דיפרנציאל מסדר שני:

$$d^2u = d[f_x dx + f_y dy] = f_{xx}dx^2 + 2f_{xy}dxdy + f_{yy}dy^2$$

כעת נגדיר אופרטור $d\cdot$: $d\cdot = \frac{\partial \cdot}{\partial x}dx + \frac{\partial \cdot}{\partial y}dy$

נעשה חזקה של $d\cdot$ כבינום של פולינום (מהבינום של ניוטון)

ואז הדיפרנציאל מסדר n:

$$d^n u = \left(\frac{\partial\cdot}{\partial x}dx + \frac{\partial\cdot}{\partial y}dy\right)^n$$

דוגמה

חשב את הדיפרנציאל השלישי של הפונק' בנק' $(1,1)$

$$u=x^2\ln y$$

$u_x=2x\ln y \quad u_y=\frac{x^2}{y} \quad u_{xx}=2\ln y \quad u_{yy}=-\frac{x^2}{y^2} \quad u_{xy}=\frac{2x}{y}$

$u_{yxx}=0 \quad u_{yyy}=\frac{2x^2}{y^3} \quad u_{xxy}=\frac{2}{y} \quad u_{xyy}=-\frac{2x}{y^2}$

$$d^3u = u_{xxx}+3u_{xxy}+3u_{xyy}+u_{yyy} = \frac{6}{y}-\frac{6x}{y^2}+\frac{2x^2}{y^3}$$

$$d^3u(1,1)=6-(6-2)=\underline{2}$$

הערה

במקרה של פונק' n-ית משתנים, הדיפרנציאל ה-n-י הוא

$$d^nu=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial}{\partial x_2}dx_2+\dots+\frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^n u$$

תרגיל

מצא d^2u לפונק' $u=xyz$

$u_{xx}=u_{yy}=u_{zz}=0$ $\quad u_{xy}=z \quad u_{xz}=y \quad u_{yz}=x$

$$d^2u=z\,dx\,dy+y\,dx\,dz+x\,dy\,dz$$

<u>נוסחת טיילור</u>

תהי $u:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ $u=f(x_1,\dots,x_n)$ פונק' השייכת ל-C^{n+1} בסביבת הנק' $M_0(x_1^0,\dots,x_n^0)$ ותהי $\Delta u=f(M)-f(M_0)$ התוספת של הפונק' u בנק' M_0. אזי קיימת נק' N על הקטע המחבר את הנק' M ו-M_0 כך שמתקיים:

$$\Delta u=du(M_0)+\frac{1}{2!}d^2u(M_0)+\dots+\frac{1}{n!}d^nu(M_0)+\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}u(N)$$

כאשר $dx_i=x_i-x_i^0$ $(i=1,\dots,n)$ שווים בכל אחד מהדיפרנציאלים של u.

דוגמה

מצא 3 איברים ראשונים בנוסחת טיילור, f

הפונק': $f(x,y)=x^3+y^3+2x^2-4y^2+x-1$

בסביבת הנק' $(1,2)$

פתרון

$f_x=3x^2+4x+1 \quad f_y=3y^2-8y \quad f_{xy}=0$

$f_{xx}=6x+4 \quad f_{yy}=6y-8 \quad f_{xxy}=0$

$f_{xxx}=6 \quad f_{yyy}=6 \quad f_{xyy}=0$

$$\Delta f = -5 + \frac{1}{2}\left((6\cdot 1+4)(x-1)^2 + (6\cdot 2-8)\cdot(y-2)^2\right) + 1\cdot\left((3\cdot 1^2+4\cdot 1-1)(x-1) + (3\cdot 2^2 - 8\cdot 2)(y-2)\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(6(x-1)^3 + 6(y-2)^3\right)$$

החלפת משתנים

תהי $f(x,y)$ גזירה לפי שני משתניה. נחליף: $f(s(x,y),t(x,y))$ אזי מתקיים:

$$\begin{cases} f'_x = f'_s\cdot s'_x + f'_t\cdot t'_x \\ f'_y = f'_s\cdot s'_y + f'_t\cdot t'_y \end{cases}$$

$$f''_{xx} = f''_{ss}\cdot(s'_x)^2 + f''_{st}\cdot t'_x\cdot s'_x + f'_s\cdot s''_{xx} + (f''_{ts} s'_x + f''_{tt}\cdot t'_x)\cdot t'_x + f'_t\cdot t''_{xx} =$$
$$= f''_{ss}(s'_x)^2 + f''_{tt}(t'_x)^2 + 2f''_{st} s'_x t'_x + f'_s s''_{xx} + f'_t t''_{xx}$$

ובאותו אופן עבור f''_{yy}

תרגיל 1

תהי $u(x,y)$. כאשר $x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi$, חשב $u''_{xx}+u''_{yy}$

ומכאן

$$\rho^2 = x^2+y^2 \qquad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

$$2\rho\rho'_x = 2x \Rightarrow \rho'_x = \frac{2x}{2\rho} = \frac{x}{\rho} = \cos\varphi \qquad \rho'_y = \sin\varphi$$

$$\varphi'_x = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{\sin\varphi}{\rho} \qquad \varphi'_y = \frac{\cos\varphi}{\rho}$$

$$\varphi''_{xx} = -\frac{\cos\varphi\cdot\varphi'_x\rho - \rho'_x\cdot\sin\varphi}{\rho^2} = \dots = \frac{\sin 2\varphi}{\rho^2}$$

$$\varphi''_{yy} = -\frac{\sin 2\varphi}{\rho^2}$$

$$\varphi''_{xy} = -\frac{\cos\varphi\cdot\varphi'_y\rho - \rho'_y\cdot\sin\varphi}{\rho^2} = \frac{\sin^2\varphi - \cos^2\varphi}{\rho^2}$$

$$\rho''_{xx} = \frac{\sin^2\varphi}{\rho} \qquad \rho''_{yy} = \frac{\cos^2\varphi}{\rho} \qquad \rho''_{xy} = -\frac{\sin\varphi\cdot\cos\varphi}{\rho}$$

ומכאן מקבלים את הדרוש

דוגמה 2

ידוע ש:

$$df = f'_x dx + f'_y dy$$
$$d^2f = f''_{xx}dx^2 + 2f''_{xy}dxdy + f''_{yy}dy^2$$
$$d^n f = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n$$

ומכאן תהי $u = x^2\ln y$, חשב $d^3u(1,1) = ?$

$$u'_x = 2x\ln y \quad u'_y = \frac{x^2}{y} \quad u''_{xx} = 2\ln y \quad u''_{xy} = \frac{2x}{y} \quad u''_{yy} = -\frac{x^2}{y^2}$$

$$u'''_{xxx} = 0 \quad u'''_{xxy} = \frac{2}{y} \quad u'''_{xyy} = -\frac{2x}{y^2} \quad u'''_{yyy} = \frac{2x^2}{y^3}$$

ובנק' $(1,1)$:

$$u'_x = 0 \quad u'_y = 1 \quad u''_{xx} = 0 \quad u''_{xy} = 2 \quad u''_{yy} = -1 \quad u'''_{xxx} = 0 \quad u'''_{xxy} = 2$$
$$u'''_{xyy} = -2 \quad u'''_{yyy} = 2$$

$$\Delta^3 u = u'''_{xxx}dx^3 + 3u'''_{xxy}dxdy^2 + u'''_{yyy}dy^3 + 3u'''_{xyy}dxdy^2 =$$
$$= 6dx^2dy - 6dxdy^2 + 2dy^3$$

דוגמא 3

תהי $f(s(x,y),t(x,y))$ כך ש-

$s(x,y) = a_1x + b_1y$

$t(x,y) = a_2x + b_2y$

$$d^n f = \left(\frac{\partial}{\partial s}ds + \frac{\partial}{\partial t}dt\right)^n f$$

$$d^2 f = f''_{ss}ds^2 + 2f''_{st}dsdt + f''_{tt}dt^2 + f'_s d^2s + f'_t d^2t$$

$$ds = s'_x dx + s'_y dy = a_1dx + b_1dy$$

$$d^2s = d(a_1dx + b_1dy) = 0$$

$$df = f'_x dx + f'_y dy$$

$$d^2f = \ldots = f''_{xx}dx^2 + 2f''_{xy}dxdy + f''_{yy}dy^2$$

כלת אם $s(x,y) = x+y$ $t(x,y) = x-y$

$$d^2f = f''_{ss}ds^2 + 2f''_{12}dsdt + f''_{12}dt^2 = \ldots = f''_{ss}(dx+dy)^2 + 2f''_{st}(dx+dy)(dx-dy) + f''_{tt}(dx-dy)^2$$

טורי טיילור

דוגמה 1

מצא טור טיילור $f(x,y)=\frac{\cos x}{\cos y}$

$$\cos t = 1-\frac{t^2}{2}+o(t^2)$$

$$\frac{\cos x}{\cos y}=\frac{1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{1-\left(\frac{y^2}{2}+o(y^2)\right)}=\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\left(1+\frac{y^2}{2}-o(y^2)\right)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}-\frac{x^2y^2}{4}+o(x^2)-o(y^2)$$

$$\frac{1}{1-q}=1+q+q^2+\dots$$

$$1-\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}$$

דוגמה 2

טמור: $f(x,y)=e^{x+y}$

$$f(x,y)=f(1,1)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left((x-1)\frac{\partial}{\partial x}+(y-1)\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(1,1)=$$

$$=f(1,1)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{m=0}^{n}\frac{n!\,(x-1)^m(y-1)^{n-m}}{\partial x^m\partial y^{n-m}\cdot m!(n-m)!}\cdot\frac{\partial^n f(1,1)}{\partial x^m\partial y^{n-m}}=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x-1)^m(y-1)^k}{m!\,k!}\cdot\frac{\partial^{m+k}f(1,1)}{\partial x^m\partial y^k}=e^2\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x-1)^m(y-1)^k}{m!\,k!}$$

$n=m+k$

$$\frac{\partial^{m+k}f}{\partial x^m\partial y^k}=e^{x+y}$$

דוגמה 3

תהי $f(x,y)\in C^{\infty}(\mathbb{R}^2)$; $\alpha\in\mathbb{R}/\mathbb{Q}$; $x\to 0^+$: $\forall n\in\mathbb{N}: f(x,x^\alpha)=o(x^n)$

הוכח שלכל $n\in\mathbb{N}$: $f(x,y)=o(|x|^n+|y|^n)$

הוכחה

$$f(x,y)=\sum_{n=0}^{n}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{m!\,x^k y^{m-k}}{k!(m-k)!\,\partial x^k\partial y^m}f(0,0)+o\left(\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{n+1}\right)$$

נניח $n>k+\alpha l$, αn, אז: $\frac{\partial^{k+l}f}{\partial x^k\partial y^l}f(0,0)=0$ $(k,l\in\mathbb{N}\cup\{0\})$

יש (1) $f(x,y)=\sum_{k_1=0}^{n}\sum_{k_2=0}^{n}\frac{1}{k_1!k_2!}\cdot\frac{\partial^{k_1+k_2}f}{\partial y^{k_1}\partial y^{k_2}}\cdot\frac{x^{k_1}y^{k_2}}{k_1!k_2!}+o(|x|^n+|y|^n)$

ובכן, $f(x,x^\alpha)=\sum_{k_1=0}^{n}\sum_{k_2=0}^{n}\frac{1}{k_1!k_2!}\cdot\frac{\partial^{k_1+k_2}f}{\partial x^{k_1}\partial y^{k_2}}(0,0)x^{k_1}y^{k_2}+o(|x|^n+|y|^{\alpha n})$

$$f(x,x^\alpha)=o(x^n)\Rightarrow f(x,x^\alpha)=o(x^{k+\alpha l})$$

ולכן $\sum_{\substack{0\le k_i<n\\ k_1=k,\ k_2=l}}\frac{1}{k_1!k_2!}\frac{\partial^{k_1+k_2}f}{\partial x^{k_1}\partial y^{k_2}}=0\Rightarrow\frac{\partial^{k+l}f}{\partial x^k\partial y^l}(0,0)=0\Rightarrow(1): f=o(|x|^n+|y|^n)$

טורי טיילור

דוגמה 1

מצא טור טיילור $f(x,y)=\frac{\cos x}{\cos y}$

$$\cos t = 1-\frac{t^2}{2}+o(t^2)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\cos x}{\cos y}=\frac{1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{1-\left(\frac{y^2}{2}-o(y^2)\right)}\underset{\Downarrow}{=}\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\left(1+\frac{y^2}{2}-o(y^2)\right)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}-\frac{x^2y^2}{4}+o(x^2)-o(y^2)$$

$$\frac{1}{1-q}=1+q+q^2+\dots$$

$$1-\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}$$

דוגמה 2

עבור $f(x,y)=e^{x+y}$:

$$f(x,y)=f(1,1)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left((x-1)\frac{\partial}{\partial x}+(y-1)\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(1,1)=$$

$$=f(1,1)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{m=0}^{n}\frac{n!\,(x-1)^m(y-1)^{n-m}}{m!\,(n-m)!}\cdot\frac{\partial^n f(1,1)}{\partial x^m\partial y^{n-m}}=$$

$$\underset{n=m+k}{=}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x-1)^m(y-1)^k}{m!\,k!}\cdot\frac{\partial^{m+k}f(1,1)}{\partial x^m\partial y^k}\underset{\Downarrow}{=}e^2\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x-1)^m(y-1)^k}{m!\,k!}$$

$$\frac{\partial^{m+k}f}{\partial x^m\partial y^k}=e^{x+y}$$

דוגמה 3

תהי $f(x,y)\in C^{\infty}(\mathbb{R}^2)$; $\alpha\in\mathbb{R}/\mathbb{Q}$; $x\to 0^+$: $\forall n\in\mathbb{N}: f(x,x^\alpha)=o(x^n)$

הוכח שלכל $n\in\mathbb{N}$: $f(x,y)=o(|x|^n+|y|^n)$

הוכחה

$$f(x,y)=\sum_{n=0}^{n}\frac{1}{n!}\sum_{m=0}^{k}\frac{m!\,x^k y^{m-k}}{k!\,(m-k)!\,\partial x^k\partial y^{m-k}}f(0,0)+o\left(\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{n+1}\right)$$

נניח $n>k+\alpha l$, αn, $n\in\mathbb{N}$: $\frac{\partial^{k+l}f}{\partial x^k\partial y^l}f(0,0)=0$ $(k,l\in\mathbb{N}\cup\{0\})$

שם (1) $f(x,y)=\sum_{k_1=0}^{n}\sum_{k_2=0}^{n}\frac{1}{k_1!\,k_2!}\cdot\frac{\partial^{k_1+k_2}f}{\partial x^{k_1}\partial y^{k_2}}\cdot\frac{x^{k_1}y^{k_2}}{k_1!\,k_2!}+o(|x|^n+|y|^n)$

ובכן, $f(x,x^\alpha)=\sum_{k_1=0}^{n}\sum_{k_2=0}^{n}\frac{1}{k_1!\,k_2!}\cdot\frac{\partial^{k_1+k_2}f}{\partial x^{k_1}\partial y^{k_2}}(0,0)\,x^{k_1}y^{k_2}+o(|x|^n+|y|^{\alpha n})$

$$f(x,x^\alpha)=o(x^n)\Rightarrow f(x,x^\alpha)=o(x^{k+\alpha l})$$

ולכן $\sum_{\substack{0\le k_i<n\\k_1=k,\ k_2=l}}\frac{1}{k_1!\,k_2!}\frac{\partial^{k_1+k_2}f}{\partial x^{k_1}\partial y^{k_2}}=0\Longrightarrow\frac{\partial^{k+l}f}{\partial x^k\partial y^l}(0,0)=0\Rightarrow(1): f=o(|x|^n+|y|^n)$

אקסטרמום

דוגמה 4

מצא אקסטרמום מקומי של $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$

$$\begin{cases} f'_x=3x^2-3y=0 \\ f'_y=3y^2-3x=0 \end{cases} \Rightarrow (0,0)\quad(1,1)$$

בנק' $(0,0)$ מט' הנגזרות החלקיות מסדר שני היא

$$\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |\det|=-9$$

$\Downarrow$

אין אקסטרמום.

בנק' $(1,1)$

$$\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix}=27$$

$\Downarrow$

$(1,1)$ אקסטרמום, וגם $f_{xx}>0$ לכן מינימום.

דוגמה 5

מצא אקסטרמום $f(x,y)=4-\sqrt{x^2+y^2}$

$$f'_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=0 \Rightarrow x=0$$

$$f'_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0 \Rightarrow y=0$$

ומהגדרת הפונק' $(0,0)$ מקסימום.

דוגמה 6

$f(x,y,z)=x+\frac{y^2}{4x}+\frac{z^2}{y}+\frac{2}{z}$ $\quad x,y,z>0$

$$\begin{cases} f'_x=0 \\ f'_y=0 \\ f'_z=0 \end{cases} \Rightarrow \left(\tfrac{1}{2},1,1\right)$$

והדט' של המט' יהיה $|\Delta_1|=4$ $|\Delta_2|=8$ $|\Delta_3|=32$

$\Downarrow$

מינימום לוקלי

פונקציות סתומות

תהי $F(x,y)$ פונק' המוגדרת בתחום D. אם המשתנים x,y קשורים ע"י משוואה פונקציונלית $F(x,y)=0$ ולכל x מקטע מסוים קיים לפחות y אחד כך שהזוג (x,y) מקיים $F(x,y)=0$ אזי המשוואה זו מגדירה פונק' $y=f(x)$ כך ש- $F(x,f(x))\equiv 0$.

הגדרה

הפונק' $y=f(x)$ נקראת פונק' סתומה אם היא נתונה כפתרון של $F(x,y)=0$.

דוגמה

נתונה משוואה $x^2+y^2=R^2$ מצא את הפונק' הסתומה $y=f(x)$ ב- $[-R,R]$ המקיימת אותה.

פתרון

חצי מעגל עליון $y_1=\sqrt{R^2-x^2}$

חצי מעגל תחתון $y_1=-\sqrt{R^2-x^2}$

פונק' סתומה לא רציפה:

$$y_3=\begin{cases}\sqrt{R^2-x^2} & -\frac{R}{2}\le x\le \frac{R}{2}\\ -\sqrt{R^2-x^2} & -R\le x<-\frac{R}{2};\ \frac{R}{2}<x\le R\end{cases}$$

משפט הפונק' הסתומה

תהי $F(x,y)$ מוגדרת במלבן $R=[a,b]\times[c,d]$ ותהי $M_0(x_0,y_0)$ נק' פנימית של המלבן R. אם:

1) $F(x_0,y_0)=0$

2) $F\in C^1$ בסביבת M_0

3) $F'_y(x_0,y_0)\neq 0$

אזי קיימת סביבה של הנק' M_0 שבה מוגדרת פונק' $y=f(x)$ כך ש- $F(x,f(x))\equiv 0$ בסביבה הנתונה:

א. $y_0=f(x_0)$

ב. f רציפה ב-x

ג. f גזירה ב-x ומתקיים $f'(x_0)=-\frac{F'_x(x_0,y_0)}{F'_y(x_0,y_0)}$

נראה שהמשפט מתקיים בדוגמה הקודמת $F(x,y)=x^2+y^2-R^2$

סביב $(0,R)$:

ראשית, התנאים מתקיימים.

נקח $f(x)=\sqrt{R^2-x^2}$, נציב התנ' אם שליה (+)

רציפות $\lim_{x\to0} f(x)=R$ (+) גזירות

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x_0)-f(x_0+h)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{R-\sqrt{R^2-(R+h)^2}}{h}=\frac{h}{\sqrt{R^2-h^2}}=0$$

לופיטל

תרגיל

נתונה המשוואה $3x^2y-yz^2-4xz=7$

בסביבת הנק' $M_0(-1,1,2)$

א. בדוק שהמשוואה הנ"ל מגדירה פונק' סתומה $y=\varphi(x,z)$ קטנה

ב. הוכח ש-φ די פרנציאבילית ב-$(-1,2)$

ג. האם המשוואה הנתונה מגדירה פונק' סתומה $z=f(x,y)$ בסביבת M_0.

פתרון

א. $F(x,y,z)=3x^2y-yz^2-4xz-7 \Leftarrow y=\frac{4xz+7}{3x^2-z^2}$

נבדוק את תנא' המשפט:

(1) $F(-1,1,2)=0$

(2) $F\in C^1$

(3) $F'_y(-1,1,2)=1\neq0$

לכן קיבלנו את הנדרש.

ב. $\varphi'_z=\frac{2yz+4x}{3x^2-z^2}$ $\varphi'_x=-\frac{6xy-4z}{3x^2-z^2}$ רציפות ולכן דיפ'.

ג. נתייחס ל-F כמשוואה ריבועית ביחס ל-z. שורשיה:

$$z_{1,2}=\dots=\frac{-2x\pm\sqrt{4x^2+7y+3x^2y^2}}{y}$$

$\Delta(1,1)=0$ ובסביבתה שליליות אי אפשר.

דוגמה

המט' $A=\begin{pmatrix} 6 & 2 & -4 \\ 2 & 5 & 0 \\ -4 & 0 & 14 \end{pmatrix}$ מייצגת את $\phi=6y_1^2+5y_2^2+14y_3^2+4y_1y_2-8y_1y_3$

הגדרה

התבנית הריבועית תקרא חיובית (או שלילית) אם לכל הערכים האפשריים של המשתנים $y_1,\dots,y_n$ שאינם מתאפסים הפונ' ϕ מקבלת ערכים חיוביים (או שליליים) בלבד.

אם ϕ מקבלת ערכים חיוביים ושליליים ביחד היא נקראת מעורבת.

אם ϕ מקבלת ערכים אי שליליים (או אי חיוביים) אומרים שהיא אינה שלילית (אי חיובית).

דוגמאות

א. $\phi=y_1^2+y_2^2+y_3^2$ חיובית

ב. $\phi=-(y_1-y_2)^2$ אי חיובית

משפט סילבסטר

התבנית הריבועית $\phi(y_1,\dots,y_n)$ חיובית אמ"מ כל המינורים הראשיים של המט' A המייצגת אותה חיוביים.

ϕ שלילית אמ"מ הסימנים של המינורים הראשיים מתחלפים לסירוגין כאשר A_1 שלילי.

דוגמה

התבנית מהדוגמה הקודמת חיובית.

נקודות קיצון

הגדרה

לפונק' $u=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ יש מקס' (או מינ') מקומי בנק' M_0 אם קיימת סביבה של M_0 כך שלכל M מהסביבה הנ"ל מתקיים $f(M)\le f(M_0)$ (או בהתאמה $f(M)\ge f(M_0)$).

אם נסמן $\Delta u=f(M)-f(M_0)$, ואם לכל M מתקיים:

א. $\Delta u\le 0$, אז ב-M_0 יש לפונק' u מקסימום מקומי.

ב. $\Delta u\ge 0$, אז ב-M_0 יש לפונק' u מינימום מקומי.

<u>תנאי הכרחי לקיום אקסטרמום</u>

אם לפונק' u יש אקסטרמום בנק' M_0 ובנוסף היא בעלת נגזרות חלקיות מסדר ראשון בנק' זו אזי כל הנגזרות הללו שוות לאפס.

הגדרה

נאמר ש-M_0 היא נקודה קריטית אם עשוי להיות בה אקסטרמום מקומי (או שהנגזרות החלקיות מתאפסות או שאינן קיימות).

תרגיל

מצא את כל הנק' הקריטיות של $f(x,y)=|x|+x^2y^2$

פתרון

$$f'_x=\begin{cases}1+2xy^2 & x>0\\ -1+2xy^2 & x<0\\ \text{לא קיים} & x=0\end{cases}\qquad f'_y=2x^2y$$

$$\Downarrow$$

נק' מהצורה $(0,y)$

הגדרה

פונק' של n משתנים מהצורה $\Phi(y_1,\dots,y_n)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}y_iy_j$ נקראת תבנית ריבועית של $y_1,\dots,y_n$ והמט' הסימטרית $A=(a_{ij})$ $\begin{smallmatrix}i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,n\end{smallmatrix}$ מייצגת אותה.

פונקציות סתומות ואקסטרמום

תרגיל

א. הוכיחו כי המערכת

$$\begin{cases} x e^{u+v} + 2uv = 1 \\ y e^{u-v} - \frac{u}{1+v} = 2x \end{cases}$$

מגדירה פונק' דיפרנציאביליות $u(x,y)$, $v(x,y)$ בסביבת $(1,2)$ וגם $u(1,2)=v(1,2)=0$

ב. מצאו את $\frac{\partial u}{\partial x}(1,2)$

פתרון

תהי $F:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^2$ המוגדרת ע"י

$$F(x,y,u,v) = (\underbrace{xe^{u+v}+2uv-1}_{F_1}, \underbrace{ye^{u-v}-\frac{u}{1+v}-2x}_{F_2})$$

א. נראה שמתקיימים תנאי משפט הפונק' הסתומה:

$F(1,2,0,0)=(0,0)$ ✓(1)

$F_x=(e^{u+v}, -2)$ $\quad F_y=(0, e^{u-v})$ $\quad F_u=(xe^{u+v}+2v, ye^{u-v}-\frac{1}{1+v})$ ✓(2)

$F_v=(xe^{u+v}+2u, -ye^{u-v}+\frac{u}{(1+v)^2})$

$F\in C^1 \Leftarrow$ כל הנגזרות החלקיות רציפות בסביבת $(1,2,0,0)$

$$\frac{D(F_1,F_2)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} F'_{1u} & F'_{1v} \\ F'_{2u} & F'_{2v} \end{vmatrix} = \dots$$ ✓(3)

בנק' $(1,2,0,0)$ נקבל את הדטרמיננטה

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

$\Downarrow$

מהמשפט הפונק' הסתומה נקבל את הנדרש.

ב. נשתמש בכלל קרמר:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1,2) = -\frac{\frac{D(F_1,F_2)}{D(x,v)}}{\frac{D(F_1,F_2)}{D(u,v)}}(1,2,0,0) = \frac{0}{-3} = \underline{\underline{0}}$$

$$\frac{D(F_1,F_2)}{D(x,v)} = 0$$

אקסטרמום עם אילוצים

דוגמה

מצא את האקסטרמום של הפונק' $z=x^2+y^2$ עם האילוץ $x+y=1$

פתרון

$y=1-x \Rightarrow$

$$z=2x^2-2x+1$$

$$z'=4x-2=0 \qquad x=\frac{1}{2} \qquad y=\frac{1}{2}$$

$$z''=4>0$$

ולכן הנק' הקריטית $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ היא נק' קריטית של הפונק' תחת האילוץ.

תרגיל

מצא את הערך הגדול ביותר והקטן ביותר של הפונק': $z=x^2+y^2+2x-2y$ על חצי המעגל העליון

$$c=\{(x,y): x^2+y^2=1,\ y\geq 0\}$$

פתרון

האילוץ הוא $y=\sqrt{1-x^2}$; $-1\leq x\leq 1$

נציב את הפונק' שלו לאילוץ:

$$z=1+2x-2\sqrt{1-x^2}$$

$$z'=2+\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}=0$$

$$2\sqrt{1-x^2}+2x=0$$

$$2\sqrt{1-x^2}=-2x \Rightarrow 1-x^2=x^2$$

$x=-\sqrt{0.5}$ אקסטרמום: $(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$

ונסתכל גם על נקודות הקצה $(1,0)$ $(-1,0)$

$$z(-\frac{1}{\sqrt{2}})=1-2\sqrt{2} \qquad z(1)=3 \qquad z(-1)=-1$$

$$\Downarrow$$

לכן 3 הערך הגדול ביותר ו- $1-2\sqrt{2}$ הקטן ביותר

כופלי לגרנג'

דרך נוספת למציאת אקסטרמום עם אילוצים היא שיטת כופלי לגרנג'

תרגיל

מצאי את נק' הקיצון של הפונק' $u(x,y)=xy$ תחת האילוץ $x+y-1=0$

פתרון

נבנה פונק' לגרנג'

$$L=\underbrace{u(x,y)}_{\text{הפונק'}}+\underbrace{\lambda}_{\text{כופלי לגרנג'}}\cdot\underbrace{(x+y-1)}_{\text{האילוץ}}=xy+\lambda(x+y-1)$$

נפתור מערכת

$$L_x=0$$
$$L_y=0$$
$$L_\lambda=0$$

ונקבל את הנק' $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

נמצא את המרחב המשיק

$$d^2L=L_{xx}dx^2+L_{yy}dy^2+2L_{xy}dxdy=2dxdy$$

כמו כן

$$g(x,y)=x+y-1=0$$
$$dg=g_xdx+g_ydy=0$$
$$dx=-dy$$

לכן $d^2L<0$ ולכן יש מקס' מתנאי

תרגיל

מצאי נק' קיצון מותנה לפונק' $f(x,y)=1-4x-8y$

תחת האילוץ $x^2-8y^2=8$

פתרון

פונק' לגרנג' היא:

$$L=1-4x-8y+\lambda(x^2-8y^2-8)$$
$$L_x=-4+2\lambda x=0 \Rightarrow \lambda=\frac{2}{x}$$
$$L_y=-8-16\lambda y=0 \Rightarrow \lambda=-\frac{1}{2y} \quad \Rightarrow x=-4y$$
$$L_\lambda=x^2-8y^2-8=0 \Rightarrow y=\pm 1$$

$(-4,1)$ $\lambda_1=-\frac{1}{2}$

$(4,-1)$ $\lambda_2=\frac{1}{2}$

$L_{xx}=2\lambda \qquad L_{yy}=-16\lambda \qquad L_{xy}=0$

$d^2L=2\lambda dx^2-16\lambda dy^2$

עבור $\lambda_1=-\frac{1}{2}$:

$d^2L(-4,1,-\frac{1}{2})=-dx^2+8dy^2$

$g(x,y)=x^2-8y^2-8=0$

נציב:

$2xdx-16ydy=0$

$dx=-2dy$

$d^2L(-4,1,-\frac{1}{2})=-(-2dy)^2+8dy^2=4dy^2>0$

ולכן $(-4,1)$ מינ' בתנאי

עבור $\lambda_2=\frac{1}{2}$

$d^2L=dx^2-8dy^2$

כמו כן

$dx=-2dy$

$d^2L=-4dy^2<0$

ולכן $(-4,1)$ מקס' בתנאי

שאלה ממבחן (תשפא מועד א)

בשימוש בשיטת לגרנז' וקיצון עם אילוצים מצא את המרחק מהנק' $a=(1,2,1)$ למישור $x+y+2z=1$

מהי הנק' על מישור זה שהכי קרובה ל-a?

פתרון

פונק' המרחק בריבוע $f=(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2$

אנו מעוניינים ש-(x,y,z) תהיה על המישור לכן האילוץ

$g(x,y)=x+y+2z-1=0$

$L=(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2+\lambda(x+y+2z-1)$

$L_x=2(x-1)+\lambda=0$

$L_y=2(y-2)+\lambda=0$

$L_z=2(z-1)+2\lambda=0$

$L_\lambda=x+y+2z-1=0$

$\Rightarrow \quad x=\frac{1}{3}, \quad y=\frac{4}{3}, \quad z=-\frac{1}{3}, \quad \lambda=\frac{4}{3}$

לאחר הצבה:

$d^2L=2(dx^2+dy^2+dz^2)>0$

ולכן מינימום בתנאי

טורי טיילור

פיתוח טיילור $f(x)=f(a)+df(a)\cdot(x-a)+\frac{1}{2!}d^2f(a)\cdot(x-a)^2+\dots$

עבור פיתוח טיילור של $f(x)$ סביב הנק' a עד סדר n

השארית היא $o(\sqrt{(x-a)^n})$ (שארית פיאנו)

תרגיל ממבחן (תשע"ח מועד א)

כתבו נוסחת טיילור לפונק' $f(x,y)=\frac{1}{2-xy^2}$ מסביב ל-$(0,0)$ עד סדר 30 עם שארית פיאנו.

פתרון

$$\frac{1}{2-xy^2}=\frac{1}{2(1-\frac{xy^2}{2})}=\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{xy^2}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n y^{2n}}{2^{n+1}}=\underbrace{\sum_{n=0}^{10}}_{\text{סדר הפולינום יהיה 30}}\dots+\sum_{n=11}^{\infty}\dots$$

צ"ל שזו שארית פיאנו כלומר שזה $o(\sqrt{x^2+y^2}^{30})$

צ"ל בעצם ש $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{g(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}^{30}}=0$

כאשר $g(x,y)=\sum_{n=11}^{\infty}\frac{x^n y^{2n}}{2^{n+1}}$

נעבור לקואורדינטות קוטביות:

צ"ל:

$$\lim_{r\to0}\frac{\sum_{n=11}^{\infty}\frac{r^n\cos^n\theta\cdot r^{2n}\sin^{2n}\theta}{2^{n+1}}}{r^{30}}=0$$

עבור $|r|<1$:

$$0\le|\text{הביטוי בגבול}|\le\sum_{n=11}^{\infty}\left|\frac{r^{3n-30}}{2^{n+1}}\right|\le\sum_{n=11}^{\infty}\frac{|r|}{2^{n+1}}\le\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|r|}{2^n}=\frac{|r|}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=|r|\to0$$

ולכן הגבול שווה לאפס כנדרש.

פונקציה הופכית

משפט הפונקציה ההפוכה

אם $|J_f(a)|\neq 0$ אז $J_{f^{-1}}(f(a))=(J_f(a))^{-1}$

שאלה ממבחן

תהי' $f(x,y)=(x^3-y^2,\ \sin x-\ln y)$ $(y>0)$

א. הוכיחו ש-f^{-1} היא דיפאומורפיזם (כאשר f הפיכה אז נקרא ל-f^{-1} דיפאומורפיזם) בסביבת $(0,1)$

ב. חשבו $J_{f^{-1}}(-1,0)$

פתרון

א. $f'_y=(-2y,-\frac{1}{y})$ $\quad f'_x=(3x^2,\cos x)$

בנק' $(0,1)$ הנגזרות החלקיות קיימות ורציפות, נבדוק את היעקובי

$$J_f(0,1)=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 1 & -1\end{pmatrix} \Rightarrow |J_f(0,1)|=2$$

ולכן f הפיכה $\Rightarrow f^{-1}$ דיפאומורפיזם

ב. נשים לב כי $f(0,1)=(-1,0)$

ממשפט הפונק' ההפוכה $(J_f(0,1))^{-1}=J_{f^{-1}}(-1,0)$

נהפוך את המט'

$$\left(\begin{array}{cc|cc}0 & -2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 1\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc|cc}1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & -2 & 1 & 0\end{array}\right)=$$

$$=\left(\begin{array}{cc|cc}1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0\end{array}\right)$$

זוהי המט' המבוקשת

אינטגרציה

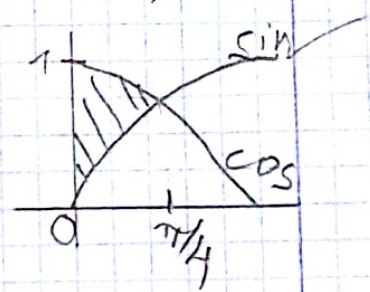
במשתנה אחד: $\int_a^b dx=b-a$

בשני משתנים: $\iint_D dx\,dy=$ שטח של D

תרגיל

חשבו את השטח המוגבל (באמצעות אינטגרל כפול) ע"י העקומות $y=\sin x, y=\cos x$ בקטע $0\le x\le \frac{\pi}{4}$

פתרון



נשים לב כי $\cos 0=1$ $\sin 0=0$

ובקטע הנ"ל sin עולה, cos יורד.

התחום הוא:

$$D=\{(x,y): 0\le x\le \tfrac{\pi}{4},\ y_1=\sin x,\ y_2=\cos x\}$$

לכן

$$S_D=\int_0^{\pi/4}\int_{\sin x}^{\cos x} dy\,dx=\int_0^{\pi/4}(\cos x-\sin x)\,dx=[\sin x+\cos x]_0^{\pi/4}=\underline{\sqrt{2}-1}$$

תרגיל

מצאו את השטח של התחום D התחום ע"י

$y^2=9-6x$ $\qquad$ $y^2=10x+25$

פתרון

נמצא נק' חיתוך:

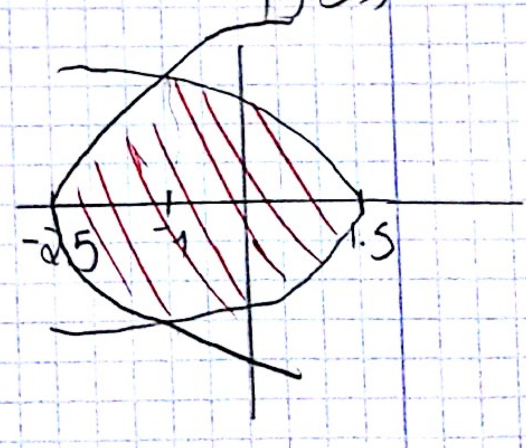
$$9-6x=10x+25$$

$$x=-1 \Rightarrow y_1=\sqrt{15} \quad y_2=-\sqrt{15}$$

$$(-1,\sqrt{15}) \quad (-1,-\sqrt{15})$$

הפונק':

$x=1.5-\frac{y^2}{6}$ $\qquad$ $x=\frac{y^2}{10}-2.5$



$$S=\int_{-\sqrt{15}}^{\sqrt{15}}\left(dy\int_{\frac{y^2}{10}-2.5}^{1.5-\frac{y^2}{6}}dx\right)=\int_{-\sqrt{15}}^{\sqrt{15}}\left(4-\frac{16}{60}y^2\right)dy=\dots$$

אך אותו הפתרון נקבל אם נפתור

$$S=\int_{-2.5}^{-1}dx\int_{-\sqrt{10x+25}}^{\sqrt{10x+25}}dy+\int_{-1}^{1.5}dx\int_{-\sqrt{9-6x}}^{\sqrt{9-6x}}dy$$

תרגיל

תשבו את האינטגרל הכפול $I=\iint_R \frac{x-y}{x+y}\,dxdy$

כאשר R מוגבל ע"י הישרות:

$x+y=3$ $\quad x+y=1$ $\quad x-y=1$ $\quad x-y=0$

פתרון

$R=\{1\le x+y\le 3\ ,\ 0\le x-y\le 1\}$

נבצע החלפת משתנים $\quad v=x+y \quad u=x-y$

$$du\,dv=dx\,dy\cdot\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$$
יעקוביאן

$$\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=2\neq 0$$

לכן נוכל להשתמש בנוסחת הפונק' ההופכית

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|^{-1}=\frac{1}{2}$$

$$du\,dv=\frac{1}{2}dx\,dy$$

לכן
$$I=\int_0^1 du\int_1^3 2\cdot\frac{u}{v}\,dv=\int_0^1 2u\,[\ln v]_{v=1}^{3}\,du=2\ln 3\int_0^1 u\,du=$$
$$=2\ln 3\left[\frac{u^2}{2}\right]_{u=0}^{1}=\underline{\ln 3}$$

תרגיל

בעזרת מעבר לקואורדינטות פולאריות $(R>0)$ חשב:

$$\iint_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dxdy$$

$$D: x^2+y^2\le Rx$$

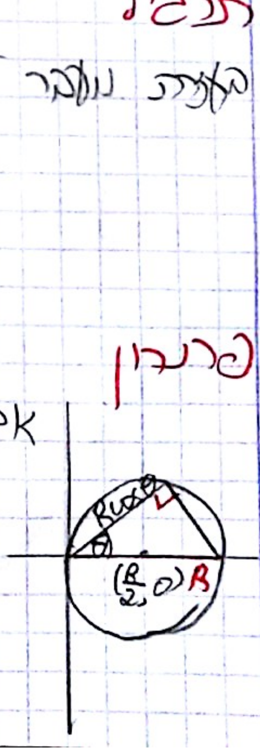
$$x^2+y^2\le Rx \Rightarrow \left(x-\frac{R}{2}\right)^2+y^2\le\frac{R^2}{4}$$

פתרון

אם נעבור לקואורדינטות (r,θ) נקבל ש-

$-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ $\quad 0<r\le R\cos\theta$

$x=r\cos\theta$ $\quad y=r\sin\theta$



$$dr\,d\theta = dx\,dy \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|$$

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r \Rightarrow dx\,dy = r^{-1}\,dr\,d\theta$$

$$S = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{0}^{R\cos\theta} \sqrt{R^2-r^2}\cdot\frac{1}{r}\,dr\,d\theta$$

נציב $t = R^2 - r^2 \quad dt = -2r\,dr$

תרגיל

חשבו את $I = \iint_B \frac{1}{(x+y)^2}\,dx\,dy$

כאשר $3 \le x \le 4 \,,\; 1 \le y \le 2$

פתרון

$$I = \int_1^2 dy \int_3^4 \frac{1}{(x+y)^2}\,dx = -\int_1^2 \left[\frac{1}{x+y}\right]_{x=3}^{4} dy = \int_1^2 \left(\frac{1}{3+y} - \frac{1}{4+y}\right) dy =$$

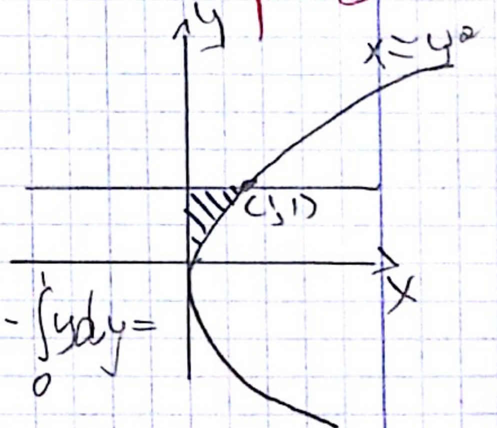
$$= \left[\ln(3+y) - \ln(4+y)\right]_{y=1}^{2} = \ln\left(\frac{25}{24}\right) \approx 0$$

תרגיל

חשבו $I = \iint_D e^{x/y}\,dx\,dy$

כאשר D תחום בין $x = y^2 \,,\, x = 0 \,,\, y = 1$

פתרון



$0 \le y \le 1$

$0 \le x \le y^2$

$$I = \int_0^1\int_0^{y^2} e^{x/y}\,dx\,dy = \int_0^1 \left[y e^{x/y}\right]_{x=0}^{y^2} dy =$$

$$= \int_0^1 (y e^y - y)\,dy = \left[y e^y\right]_{y=0}^{1} - \int_0^1 e^y\,dy - \int_0^1 y\,dy =$$

אינטגרציה בחלקים

$\int y e^y = y e^y - \int e^y$

$$= e - \underbrace{\left[e^y\right]_{y=0}^{1}}_{e-1} - \underbrace{\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{1}}_{1/2} = \frac{1}{2}$$

אינטגרלים

תכונות

1) אם $f(x,y)$ $g(x,y)$ אינטגרביליות ב-D, אזי:

א. לכל $a,b\in\mathbb{R}$ $af(x,y)+bg(x,y)$ אינטגרבילית

$$\iint_D [af(M)+bg(M)]d\sigma = a\iint_D f(M)d\sigma + b\iint_D g(M)d\sigma$$

ב. הפונק' $f\cdot g$ אינטגרבילית ב-D

ג. אם $f\leq g$ בכל הנק' של D אזי גם $\iint_D f(M)d\sigma \leq \iint_D g(M)d\sigma$

2) אם $f(x,y)$ אינטגרבילית ב-D אזי גם $|f|$ אינטגרבילית

$$\left|\iint_D f(M)d\sigma\right| \leq \iint_D |f(M)|d\sigma$$

ההפך לאו דווקא מתקיים במשפט הזה.

3) אם הפונק' $f(x,y)$ אינטגרבילית ב-D ששטחו $S(D)$ וגם

$$m=\inf_D f(x,y) \qquad M=\sup_D f(x,y)$$

$$mS(D) \leq \iint_D f(x,y)dxdy \leq MS(D)$$

אם תחום D קשיר והפונק' f רציפה ב-D אזי קיימת (x_0,y_0) ב-D עבורה $\iint_D f(x,y)dxdy = f(x_0,y_0)S(D)$

4) אם הפונק' $f(x,y)$ אינטגרבילית ב-D והתחום D מחולק ע"י עקום L בעל שטח אפס, והחלוקה מגדירה שני תחומים קשירים D_1,D_2 ללא נק' משותפות פנימיות אזי f אינטג' בכל אחד מהתחומים הללו:

$$\iint_D f(M)d\sigma = \iint_{D_1} f(M)d\sigma + \iint_{D_2} f(M)d\sigma$$

משפט

תהי הפונק' $f(x,y)$ מוגדרת במלבן $R=[a,b]\times[c,d]$ ושקיים אינטגרל כפול $I=\iint f(x,y)dxdy$ ושלכל $x\in[a,b]$ קיים האינטגרל $I(x)=\int_c^d f(x,y)dy$ אזי קיים האינטגרל

$$\int_a^b I(x)dx = \int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy$$

ומתקיים $I =$ שני אינט' הנשנים

תרגילים

א. חשב $I_1=\iint_R \frac{dxdy}{(1+x+y)^3}$ עבור $R=[2,3]\times[0,1]$

$$I_1=\int_2^3 dx\int_0^1 \frac{dy}{(1+x+y)^3} = -\frac{1}{2}\int_2^3 \left[\frac{1}{(1+x+y)^2}\right]_{y=0}^{1} dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_2^3 \left[\frac{1}{(x+2)^2} - \frac{1}{(x+1)^2}\right] dy = \dots = \frac{1}{60}$$

ב. חשב $I_2=\iint_R xy^2\cos(x^2y)\,dxdy$ כאשר $R=[0,2]\times[0,\frac{\pi}{2}]$

$$I_2=\int_0^{\pi/2} dy\int_0^2 xy^2\cos(x^2y) = \left[t=x^2 \quad dx=\frac{dt}{2x}\right] =$$

$$=\int_0^{\pi/2} y^2\int_0^4 x\cos(yt)\cdot\frac{dt}{2x}\,dy = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{y^2}{y}\left[\sin(yt)\right]_{t=0}^{4} dy =$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} y\sin(4y)\,dy = \left[\text{בחלקים} \quad u=y \quad dv=\sin 4y\right] =$$

$$=\frac{1}{2}\left(\left[-\frac{y\cos(4y)}{4}\right]_{y=0}^{\pi/2}+\int_0^{\pi/2}\frac{\cos 4y}{4}\,dy\right) = -\frac{\pi}{16}$$

אינטגרלים הכפולים בתחום כללי

משפט

תהי הפונק' $f(x,y)$ מוגדרת בתחום D בעל התכונות הבאות:

א. D חסום וסגור.

ב. כל קו ישר המקביל לציר y חותך את שפת התחום הזה יותר משתי הנק' $(y_2\ge y_1)$ $y_2(x)$; $y_1(x)$

ג. התחום D חסום בין הישרים $x=a$ $x=b$

$a=\min\{x:(x,y)\in D\}$ $b=\max\{x:(x,y)\in D\}$

נניח: אם קיים $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ ולכל x קבוע $\in[a,b]$ קיים $I(x)=\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy$ אז קיים $\int_a^b I(x)\,dx$ (ומתקיים

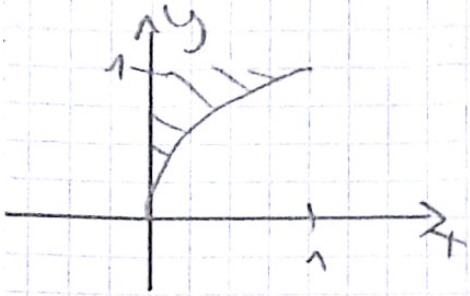
$$\iint_D f(x,y)\,dxdy=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy$$

תרגיל

חשב $I=\iint_D e^{x/y}dxdy$ כאשר D בין הקווים $y=1,\ x=0,\ x=y^2$

פתרון

$D=\{(x,y): 0\le y\le 1,\ 0\le x\le y^2\}$

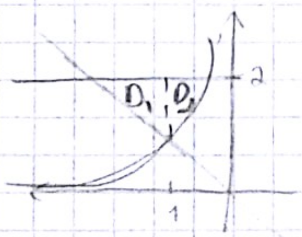


$$I=\int_0^1 dy\int_0^{y^2} e^{x/y}dx=\int y\left[e^{x/y}\right]_{x=0}^{y^2}dy=$$

$$=\int_0^1 y(e^y-1)\underset{\text{בחלקים}}{=}\frac{1}{2}$$

תרגיל

חשב $I=\iint x^2y\,dxdy$ כאשר D תחום ע"י הקווים $y=2,\ y=-x,\ xy=-1$



פתרון

נחלק לתחומים

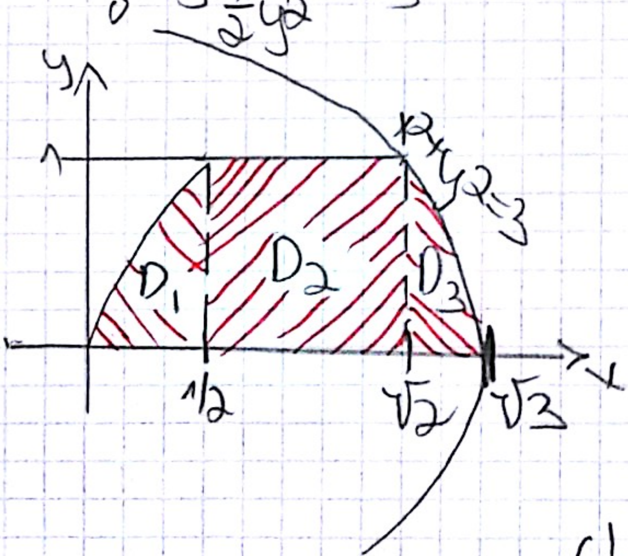
$D_1: \begin{cases} -2\le x\le -1 \\ -x\le y\le 2\end{cases}$ $\quad D_2: \begin{cases} -1\le x\le -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{x}\le y\le 2\end{cases}$

החלפת סדר אינטגרציה

דוגמה

החלף סדר אינט' עבור

$$I=\int_0^1 dy\int_{\frac{1}{2}y^2}^{\sqrt{3-y^2}} f(x,y)\,dx$$



אכן, התחום הוא

$0\le y\le 1$

$\frac{1}{2}y^2\le x\le \sqrt{3-y^2}$

שווה כאשר $x^2+y^2=3$

$D_1: \begin{cases} 0\le x\le \frac{1}{2} \\ 0\le y\le \sqrt{2x}\end{cases}$

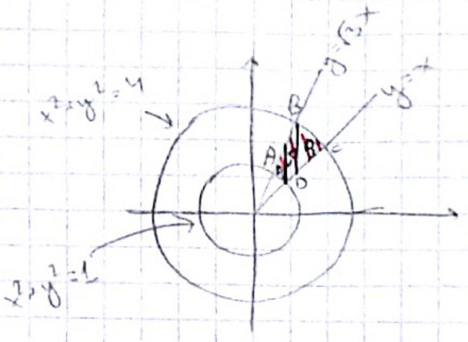
$D_2: \begin{cases} \frac{1}{2}\le x\le \sqrt{2} \\ 0\le y\le 1\end{cases}$ $\quad D_3: \begin{cases} \sqrt{2}\le x\le \sqrt{3} \\ 0\le y\le \sqrt{3-x^2}\end{cases}$

לפי התחומים אלו מחליפים

תרגיל

חשב $\iint_{D'} \arctan\frac{y}{x}\,dxdy$ כאשר $D'=\{(x,y): 1\le x^2+y^2\le 4,\ x\le y\le \sqrt{3}x,\ x\ge 0\}$

פתרון



$A(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$

$B(1,\sqrt{3})$

$C(\sqrt{2},\sqrt{2})$

$D(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$

משוואת AB: $y=\sqrt{3}x$

CD: $y=x$

BC: $y=\sqrt{4-x^2}$

AD: $y=\sqrt{1-x^2}$

$D_1: \begin{cases} \frac{1}{2}\le x\le \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sqrt{1-x^2}\le y\le \sqrt{3}x \end{cases}$ $D_2: \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}\le x\le 1 \\ x\le y\le \sqrt{3}x \end{cases}$ $D_3: \begin{cases} 1\le x\le \sqrt{2} \\ x\le y\le \sqrt{4-x^2} \end{cases}$

$$I=\int_{0.5}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dx\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{3}x} f\,dy+\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}dx\int_{x}^{\sqrt{3}x} f\,dy+\int_{1}^{\sqrt{2}}dx\int_{x}^{\sqrt{4-x^2}} f\,dy$$

ואינטגרלים ידועים

$\int \arctan x = x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)$

$\int \ln x = x\ln x - x$

נקבל את הנדרש

החלפת משתנים באינטגרל הכפול

משפט

אם המעתקה $y=y(u,v)$, $x=x(u,v)$ כאשר $(u,v)\in\Delta$ תחום של פונק' רציפות ובעלות נגזרות חלקיות רציפות שמעתיקה תחום Δ לתחום D באופן חח"ע וגם ב-Δ $\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|\neq 0$, אזי השטח $S(D)$ של התחום D הוא:

$$S(D)=\iint_{\Delta}\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|dudv$$

דוגמא

מצא את שטח הצורה $D=\{1\le x^2+y^2\le 4,\ x\le y\le\sqrt{3}x,\ x\ge 0\}$

פתרון

נעבור לקואורדינטות קוטביות $y=r\sin\theta$ $x=r\cos\theta$

$$|J|=r \Leftarrow J=\frac{D(x,y)}{D(r,\theta)}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}$$

$dxdy=r\,drd\theta,\ 1\le r\le 2,\ \frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{3}$

$$S=\iint_{\Delta} r\,dr\,d\theta=\int_1^2 dr\int_{\pi/4}^{\pi/3} r\,d\theta=\frac{\pi}{8}$$

תרגיל

$$D=\{3\le x^2-y^2\le 6,\ y\ge 0,\ 0\le x\le 3\}$$

$$\iint_D xy\,dx\,dy$$

עבור התחום

חשב את האינטגרל

נחליף $u=x^2-y^2$ $v=x$

$$\left|\frac{D(u,v)}{D(x,y)}\right|=\begin{vmatrix}2x & -2y\\ 1 & 0\end{vmatrix}=2y \Rightarrow \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|=\frac{1}{2y}$$

ונקבל משוואות

החלפת משתנים

תרגול

(*) מבחן
נחוץ

$$\iint_D \frac{2x^2 e^{x^2}}{x^2+y^2}\,dx\,dy \quad \text{when } D=\{1\le x\le 2,\ 0\le y\le x\} \quad \left(0\le \tfrac{y}{x}\le 1\right)$$

$$u=x^2 \qquad v=\frac{y}{x}$$

$$1\le u\le 4 \qquad 0\le v\le 1$$

$$\left|\frac{D(u,v)}{D(x,y)}\right| = \begin{vmatrix} 2x & 0 \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x}\end{vmatrix} = 2 \Rightarrow dx\,dy=\frac{1}{2}\,du\,dv$$

$$I=\frac{1}{2}\int_0^1 dv\int_1^4 \frac{2u e^u}{u(1+v^2)}\,du = \int_0^1 \frac{e^4-e}{1+v^2}\,dv = (e^4-e)\left[\operatorname{arctg} v\right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{\pi}{4}(e^4-e)}}$$

(*) נחוץ

$$I=\iint_D \sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\,dx\,dy \quad \text{when } D=\{\sqrt{x}+\sqrt{y}\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}$$

$$u=\sqrt{x} \qquad v=\sqrt{y}$$

$$\left|\frac{D(u,v)}{D(x,y)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{x}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{y}}\end{vmatrix} = \frac{1}{4uv} \Rightarrow dx\,dy = 4uv\,du\,dv$$

$$0\le u\le 1-v \qquad 0\le v\le 1$$

$$I=\int_0^1 dv\int_0^{1-v} \underbrace{\sqrt{u+v}}_{t'}\,\underbrace{4uv}_{s}\,du = \left(\left[\frac{4uv(u+v)^{1.5}}{1.5}\right]_{u=0}^{1-v} - \int_0^{1-v}\frac{4v(u+v)^{1.5}}{1.5}\,du\right)$$

$$t=\frac{(u+v)^{1.5}}{1.5} \qquad s'=4v$$

$$\Rightarrow I=\int_0^1 \left(\frac{4v(1-v)}{1.5} - \left[\frac{4v}{3.75} - \frac{4v^{3.5}}{3.75}\right]\right)dv = \ldots = \underline{\underline{\frac{4}{27}}}$$

(*) חשב את נפח הגוף החסום ע"י הפרבולויד $z=x^2+y^2$ והמשטחים הגליליים $xy=1$ $xy=2$ $x\ge 0$ ונצים

$$u=xy \qquad v=\frac{x}{y}$$

$$1\le u\le 2 \qquad \frac{1}{2}\le v\le 2$$

$$\left|\frac{D(u,v)}{D(x,y)}\right| = \begin{vmatrix} y & x \\ \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2}\end{vmatrix} = -\frac{2x}{y} = -2v \Rightarrow dx\,dy = -\frac{1}{2v}\,du\,dv$$

$$I=-\frac{1}{2}\int_1^2 du\int_{0.5}^2 \left(uv+\frac{u}{v}\right)\frac{1}{v}\,dv = \ldots = \underline{\frac{9}{4}}$$

תרגיל

חשב $\iiint\limits_{(V)} z\,dx\,dy\,dz$ כאשר (V) חלק הפרבולואיד

$z=4(x^2+y^2)$ בין המישור $[xy]$ והמישור $z=2$.

אינטגרלים

החלפת משתנים באינטגרל משולש

$$\iiint_{(V)} F\,d(V)=\iiint_{(V')} \tilde{F}(u,v,w)\left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\right|du\,dv\,dw$$

תרגיל

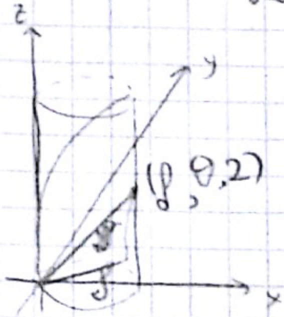
חשב את $I=\iiint_{(V)} z\sqrt{x^2+y^2}\,d(V)$

כאשר התחום (V) חסום ע"י המשטחים:

$z=\sqrt{x^2+y^2}+1 \qquad z=0 \qquad x^2+y^2=2x \Rightarrow y^2=2x-x^2$

$\Downarrow$

$z=\sqrt{2x}+1$



נחליף $x=\rho\cos\theta \quad y=\rho\sin\theta$

נציב למשוואה $x^2+y^2=2x$

נקבל $0\le\rho\le 2\cos\theta$

$-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

$0\le z\le\rho+1$

$$I=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\theta\int_0^{2\cos\theta}d\rho\int_0^{\rho+1}z\cdot\rho\cdot\rho\,dz=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\theta\int_0^{2\cos\theta}\left[\frac{z^2\rho^2}{2}\right]_0^{\rho+1}d\rho=\dots=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{32\cos^5\theta}{5}+\frac{2\cos^4\theta}{4}+\frac{8\cos^3\theta}{3}\right)d\theta$$

נזכר $\cos^5\theta$: $\quad \cos^5\theta=(1-\sin^2\theta)^2\cos\theta$

נציב $t=\sin\theta$

נזכר $\cos^4\theta$: $\quad \cos^4\theta=\frac{1}{8}(4\cos2\theta+\cos4\theta+3)$

נעבור $\cos^3\theta$ באותו אופן

תרגיל

חשב $I=\iiint_{(V)}\frac{xy}{z}dV$ כאשר

$(V)=\{(x,y,z): z\le x^2+y^2\le 3z,\ 1\le xy\le 2,\ 3x\le y\le 4x\}$

פתרון
נחליף

$$u=\frac{x^2+y^2}{z} \qquad s=\frac{y}{x} \qquad t=xy$$

$$1\le u\le 3 \qquad 3\le s\le 4 \qquad 1\le t\le 2$$

$$\left|\frac{D(t,s,u)}{D(x,y,z)}\right|=\begin{vmatrix} y & x & 0 \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} & 0 \\ \frac{2x}{z} & \frac{2y}{z} & -\frac{(x^2+y^2)}{z^2}\end{vmatrix}=-\frac{2su}{z}$$

$$\Rightarrow dxdydz=\frac{z}{2su}dt\,ds\,du$$

$$I=\int_1^2 dt\int_3^4 ds\cdot\int_1^3\frac{t}{z}\cdot\frac{z}{2su}du=\dots=\frac{3}{4}\ln 3\cdot\ln\frac{4}{3}$$

אינטגרלים לא אמיתיים התלויים בפרמטר

תהי הפונק' $f(x,y)$ מוגדרת ברצועה

$$R_\infty=\{(x,y): x\ge a,\ c\le y\le d\}$$

הגדרה

אם לכל y קבוע מהקטע $[c,d]$ קיים האינטגרל $\varphi(y)=\int_a^\infty f(x,y)dx$ אזי ל-$\varphi(y)$ קוראים אינטגרל לא אמיתי התלוי בפרמטר.

דוגמה

נבדוק קיום של האינטגרלים התלויים בפרמטר y:

$$\left|\int_1^\infty\frac{\sin(xy)}{x^2y}dx\right|\le\int_1^\infty\frac{1}{x^2y}dx=\frac{1}{y}\cdot\left[-\frac{1}{x}\right]_1^\infty=\frac{1}{y}(0+1)=\frac{1}{y}$$

ולכן קיים.

אינטגרלים כפולים לא אמיתיים

אינטגרל כפול לא אמיתי מוגדר על תחום לא חסום D. נסמן ע"י $\{D_n\}$ את סדרת התחומים הפתוחים וע"י $\overline{D_n}$ את הסגור של D_n.

הגדרה

סדרה של תחומים פתוחים $\{D_n\}$ מכסה מונוטונית את התחום D אם:

א. $\forall n: \overline{D_n}\subset D_{n+1}$

ב. $D=\bigcup_{n=1}^{\infty}D_n$

דוגמאות

א. $D_n=\{(x,y): 0<y<n\}$ של $\mathbb{R}^2$.

ב. $D_n=\{(x,y): a<x<b,\ 0<y<n\}$

הגדרה

תהי הפונק' $f(x,y)$ אינטגרבילית מעל כל חלק חסום וסגור של תחום מישורי אינסופי D. אם לכל כיסוי מונוטוני $\{D_n\}$ של D קיים גבול סופי של סדרת האינ' $\iint_{D_n} f(x,y)\,dx\,dy$ והיא אינו תלוי בבחירת D_n אז היא נקרא אינטגרל לא אמיתי של $f(x,y)$ מעל D ומסמנים $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$. במקרה כזה אומרים שהאינטגרל הנ"ל מתכנס.

משפט

תהא $f(x,y)$ פונק' אי שלילית בתחום לא חסום D. אינטגרל לא אמיתי $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ מתכנס אם"ם קיים כיסוי מונוטוני אחד $\{D_n\}$ של D שהסדרה $a_n=\iint_{D_n} f(x,y)\,dx\,dy$ חסומה.

תרגיל

בדוק את התכנסות האינטגרל $I=\iint_D e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$

כאשר $D=\{(x,y): x,y\geq 0\}$

פתרון

לפי המשפט האינטגרנד אי שלילי ולכן מספיק כיסוי אחד.

$$D_n=B(\vec{0},\sqrt{n})$$

נעבור לקואורדינטות קוטביות:

$$\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy=\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\sqrt{n}} re^{-r^2}\,dr \underset{t=r^2}{=} \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{n} e^{-t}\,dt=$$

$$=\dots=2\pi\cdot\frac{1}{2}=\pi$$

קיבלנו שזה חסום כנדרש.

תרגיל

חשב את

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{dx\,dy}{(x^2+y^2+1)^2}$$

(המשך)

$D_R = \{(x,y) : x^2+y^2 < R^2\}$ הכיסוי אז

$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{R} \frac{r\,dr}{(r^2+1)^2} \underset{t=r^2}{=} \frac{1}{2}\cdot 2\pi \int_0^{R^2} \frac{dt}{(t+1)^2} = \pi\cdot\left[-\frac{1}{t+1}\right]_0^{R^2} \to \pi$$

אקסטרמום עם אילוצים

תרגיל

מצאו את האקסטרמום של

$u = x^2+y^2+z^2+t^2$

תחת האילוצים g_1, g_2

פתרון

נבנה פונק' לגרנג'

$$L = x^2+y^2+z^2+t^2+\lambda_1(\overbrace{x+y+z+t-8}^{g_1})+\lambda_2(\overbrace{2x+3y-z+2t}^{g_2})$$

$L_x = 2x+\lambda_1+2\lambda_2 = 0$

$L_y = 2y+\lambda_1+3\lambda_2 = 0$

$L_z = 2z+\lambda_1-\lambda_2 = 0$

$L_t = 2t+\lambda_1+2\lambda_2 = 0$

$L_{\lambda_1} = x+y+z+t-8 = 0$

$L_{\lambda_2} = 2x+3y-z+2t = 0$

$\Rightarrow \underbrace{\left(\frac{4}{3}, 0, \frac{16}{3}, \frac{4}{3}\right)}_{\text{מין'}} \quad \lambda_1 = -8 \quad \lambda_2 = \frac{8}{3}$