פתרון תרגיל בית 9 במבנים אלגבריים
89-214 סמסטר א' תשע"ז

הוראות בהגשת הפתרון יש לרשום בכל דף שם מלא, מספר ת"ז ומספר קבוצת תרגול. תאריך הגשת התרגיל הוא בתרגול בשבוע המתחיל בתאריך כ"ד טבת ה'תשע"ז, 2017.1.29

שאלות להגשה

שאלה 1. בכל סעיף נתונה חבורה G ותת-חבורה $H \leq G$. הוכיחו כי $H \lhd G$ וחשבו את G/H על ידי משפט האיזומורפיזם הראשון:

א. $G = D_6$, $H = \langle \sigma^2, \tau \rangle$.

ב. $G = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}$, $H = (2\mathbb{Z}_4) \times (3\mathbb{Z})$.

פתרון.

א. מוטיבציה: פה רואים ש-$[G : H] = 2$, ולכן $H \lhd G$. לכן G/H היא חבורה מסדר 2, כלומר $\mathbb{Z}_2$. לכן נרצה לחפש $f : G \to \mathbb{Z}_2$ שעבורה $\ker f = H$.
נגדיר $f : D_6 \to \mathbb{Z}_2$ לפי

$$f\left(\tau^i \sigma^j\right) = j \pmod 2$$

נוודא ש-f מוגדרת היטב: אם $\tau^i \sigma^j = \tau^k \sigma^\ell$, אז בהכרח $j \equiv \ell \pmod 6$, ובפרט $j \equiv \ell \pmod 2$. לכן $f\left(\tau^i \sigma^j\right) = f\left(\tau^k \sigma^\ell\right)$.
נוכיח ש-f הומומורפיזם: יהיו $\tau^i \sigma^j, \tau^k \sigma^\ell \in D_6$. מהיחסים של D_6 קל לראות כי $\sigma^j \tau^k = \tau^k \sigma^{-j}$. לכן

$$\begin{aligned} f\left(\tau^i \sigma^j \tau^k \sigma^\ell\right) &= f\left(\tau^i \tau^k \sigma^{-j} \sigma^\ell\right) = f\left(\tau^{i+k} \sigma^{\ell - j}\right) = \ell - j \pmod 2 = \\ &= \ell + j \pmod 2 = f\left(\tau^i \sigma^j\right) + f\left(\tau^k \sigma^\ell\right) \end{aligned}$$

כלומר f הומומורפיזם.
נוכיח ש-f אפימורפיזם: $f(\mathrm{id}) = 0$ ו-$f(\sigma) = 1$, ולכן f על.
נחשב את $\ker f$:

$$\ker f = \left\{\tau^i \sigma^j \in D_6 \middle| f\left(\tau^i \sigma^j\right) = 0\right\} = \left\{\tau^i \sigma^j \in D_6 \middle| j \equiv 0 \pmod 2\right\} = \left\langle \sigma^2, \tau \right\rangle = H$$

לכן, לפי משפט האיזומורפיזם הראשון,

$$D_6 / \left\langle \sigma^2, \tau \right\rangle \cong \mathbb{Z}_2$$

ב. מוטיבציה: אנחנו מכירים את המנות הבאות: $\mathbb{Z}_4 / 2\mathbb{Z}_4 \cong \mathbb{Z}_2$ ו-$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_3$. אז ננחש ש-$G/H \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$. כלומר, רוצים להגדיר $f : G \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ שעבורה $\ker f = H$.
נגדיר $f : \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ לפי

$$f(m, n) = (m \pmod 2, n \pmod 3)$$

צריך לוודא שוב ש-f מוגדרת היטב: אם ניקח $(m,n)=(m',n)$, כלומר $m\equiv m' \pmod 4$, אזי גם $m\equiv m' \pmod 2$, ולכן

$$f(m,n)=(m \pmod 2, n \pmod 3)=(m' \pmod 2, n \pmod 3)=f(m',n)$$

מכאן ש-f מוגדרת היטב.
נראה ש-f הומומורפיזם: יהיו $(m_1,n_1),(m_2,n_2)\in\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}$. אזי

$$\begin{aligned} f((m_1,n_1)+(m_2,n_2)) &= f(m_1+m_2,n_1+n_2)= \\ &= (m_1+m_2 \pmod 2, n_1+n_2 \pmod 3)= \\ &= (m_1 \pmod 2, n_1 \pmod 3)+(m_2 \pmod 2, n_2 \pmod 3)= \\ &= f(m_1,n_1)+f(m_2,n_2) \end{aligned}$$

נראה ש-f על: אם $(m,n)\in\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3$, נבחר נציג של m ושל n, ואז $f(m,n)=(m,n)$ (כאשר בצד שמאל משתמשים בנציגים).
נחשב את $\ker f$:

$$\begin{aligned} \ker f &= \{(m,n)\in\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z} \mid f(m,n)=(0,0)\}= \\ &= \{(m,n)\in\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z} \mid (m \pmod 2, n \pmod 3)=(0,0)\}= \\ &= (2\mathbb{Z}_4)\times(3\mathbb{Z})=H \end{aligned}$$

לכן, לפי משפט האיזומורפיזם הראשון,

$$\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}/(2\mathbb{Z}_4)\times(3\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3$$

(וזה גם איזומורפי ל-$\mathbb{Z}_6$).

נצטט את משפטי האיזומורפיזם השני והשלישי, ואז נוכיח אותם (לא לדאוג – יש הדרכה).

משפט (משפט האיזומורפיזם השני)**.** תהי G חבורה, תהי $H\le G$ תת-חבורה, ותהי $N\lhd G$ תת-חבורה נורמלית. אזי $H\cap N\lhd H$, $N\lhd HN$, וכן

$$HN/N\cong H/H\cap N$$

משפט (משפט האיזומורפיזם השלישי)**.** תהי G חבורה, ותהיינה $H,K\lhd G$ תת-חבורות נורמליות של G כך ש-$K\subseteq H$. אזי

$$G/K\big/H/K\cong G/H$$

שאלה 2. הוכיחו את משפט האיזומורפיזם השני: יהיו G, H ו-N כמו בניסוח המשפט. נגדיר $f:H\to HN/N$ לפי $f(h)=hN$.

א. הראו ש-f הומומורפיזם.

ב. הראו ש-f על.

ג. הוכיחו כי $\ker f=H\cap N$.

ד. הסיקו את הדרוש לפי משפט האיזומורפיזם הראשון.

הוכחה.

א. יהיו $h_1,h_2\in H$. אזי

$$f(h_1h_2)=h_1h_2N=(h_1N)(h_2N)=f(h_1)f(h_2)$$

ולכן f הומומורפיזם.

ב. תהי מחלקה $hnN\in {}^{HN}\!/_{N}$ עבור $h\in H$ ו-$n\in N$. נשים לב כי $hnN=hN$, ולכן

$$f(h)=hN=hnN$$

ומכאן ש-f על.

ג. נחשב את $\ker f$:

$$\ker f=\left\{h\in H\middle|f(h)=e_{HN/N}\right\}=\{h\in H|hN=N\}=H\cap N$$

ד. לפי משפט האיזומורפיזם הראשון,

$$H/_{H\cap N}\cong HN/_N$$

$\square$

שאלה 3. נסתכל על החבורה S_4. נגדיר $K_4=\{\mathrm{id},(1,2)(3,4),(1,3)(2,4),(1,4)(2,3)\}$. תת-חבורה זו נקראת **תת-חבורת קליין**.

א. הוכיחו כי $K_4\lhd S_4$.

ב. מצאו סדרה של תת-חבורות $G_n=\{\mathrm{id}\}\lhd G_{n-1}\lhd\cdots\lhd G_1\lhd G_0=S_4$, כך שלכל i, $G_{i+1}\lhd G_i$, וגם לכל i המנה G_i/G_{i+1} היא חבורה ציקלית.
(**רמז:** היעזרו בסעיף הקודם ובתת-חבורה מוכרת).

פתרון.

א. קודם, צריך להוכיח ש-$K_4\le S_4$. לפי הקריטריון המקוצר:

- $\mathrm{id}\in K_4$.
- תהיינה $\sigma,\tau\in K_4$. לכן $\sigma=\sigma^{-1}$ ו-$\tau=\tau^{-1}$. רוצים להוכיח כי $\sigma\tau^{-1}\in K_4$, ולכן שקול להוכיח $\sigma\tau\in K_4$. אם σ או τ הן id, זה ברור; גם אם $\sigma=\tau$, אז $\sigma\tau=\sigma^2=\mathrm{id}$. לכן נניח ש-$\sigma,\tau\neq\mathrm{id}$ ו-$\tau\neq\sigma$, ונבדוק את כל האפשרויות:

$$\begin{aligned}(1,2)(3,4)(1,3)(2,4)&=(1,4)(2,3)\in K_4\\(1,3)(2,4)(1,2)(3,4)&=(1,4)(2,3)\in K_4\\(1,2)(3,4)(1,4)(2,3)&=(1,3)(2,4)\in K_4\\(1,4)(2,3)(1,2)(3,4)&=(1,3)(2,4)\in K_4\\(1,3)(2,4)(1,4)(2,3)&=(1,2)(3,4)\in K_4\\(1,4)(2,3)(1,3)(2,4)&=(1,2)(3,4)\in K_4\end{aligned}$$

ולכן $\sigma\tau^{-1}=\sigma\tau\in K_4$.

כעת נראה $K_4\lhd S_4$. תהיינה $\sigma\in S_4$, $\pi\in K_4$. צ"ל $\sigma\pi\sigma^{-1}\in K_4$. אם $\pi=\mathrm{id}$ זה ברור, אחרת $\sigma\pi\sigma^{-1}$ היא תמורה ממבנה מחזורים $(i,j)(k,\ell)$, ולכן היא ב-K_4, כדרוש.

ב. נזכור כי $A_4 \lhd S_4$ (כי היא תת-חבורה מאינדקס 2), וכעת הוכחנו $K_4 \lhd S_4$. בפרט $K_4 \lhd A_4$, וקיבלנו שרשרת

$$\{\mathrm{id}\} \lhd K_4 \lhd A_4 \lhd S_4$$

נחשב כל מנה: $A_4 \lhd S_4$ מאינדקס 2, ולכן $S_4/A_4 \cong \mathbb{Z}_2$ ציקלית.
$K_4 \lhd A_4$ והאינדקס הוא $[A_4 : K_4] = \dfrac{|A_4|}{|K_4|} = \dfrac{12}{4} = 3$, כלומר A_4/K_4 היא חבורה מסדר 3, כלומר היא ציקלית ואיזומורפית ל-$\mathbb{Z}_3$.
אבל $K_4/\{\mathrm{id}\} \cong K_4$ היא אבלית שאינה ציקלית (כי אין שם איבר מסדר 4 – כל האיברים שאינם id הם מסדר 2). אז חסרה עוד תת-חבורה נורמלית. נעדן את השרשרת ונוסיף את

$$\{\mathrm{id}\} \lhd \langle(1,2)(3,4)\rangle \lhd K_4 \lhd A_4 \lhd S_4$$

תת-החבורה $H = \langle(1,2)(3,4)\rangle$ היא תת-חבורה מסדר 2, כי $|H| = o((1,2)(3,4)) = 2$. מכאן $[K_4 : H] = 2$, כלומר $H \lhd K_4$, וכן $K_4/H \cong \mathbb{Z}_2$ ציקלית. כמו כן, $H/\{e\} \cong H \cong \mathbb{Z}_2$ גם היא ציקלית. לכן השרשרת האחרונה שקיבלנו מתאימה לתנאי השאלה.

שאלה 4. הוכיחו את משפט האיזומורפיזם השלישי: יהיו G, H ו-K כמו בניסוח המשפט. נגדיר $f : G/K \to G/H$ לפי $f(gK) = gH$.

א. הוכיחו ש-f מוגדרת היטב. כלומר, אם $g_1K = g_2K$, אזי $f(g_1K) = f(g_2K)$.

ב. הראו ש-f הומומורפיזם.

ג. הראו ש-f על.

ד. הוכיחו כי $\ker f = H/K$.

ה. הסיקו את הדרוש לפי משפט האיזומורפיזם הראשון.

הוכחה.

א. נניח ש-$g_1K = g_2K$. לכן $g_1g_2^{-1} \in K$. אבל $K \subseteq H$, כלומר $g_1g_2^{-1} \in H$, ולכן $g_1H = g_2H$. מכאן $f(g_1K) = f(g_2K)$.

ב. יהיו $g_1K, g_2K \in G/K$. אזי

$$f((g_1K)(g_2K)) = f(g_1g_2K) = g_1g_2H = (g_1H)(g_2H) = f(g_1K)f(g_2K)$$

ג. יהי $gH \in G/H$. לכן $f(gK) = gH$, ומכאן f על.

ד. נחשב את $\ker f$:

$$\ker f = \left\{gK \in G/K \middle| f(gK) = e_{G/H}\right\} = \{gK \in G/K | gH = H\} = \{gK \in G/K | g \in H\} = H/K$$

ה. לפי משפט האיזומורפיזם הראשון,

$$G/K\big/H/K \cong G/H$$

□

שאלה 5. תהי G חבורה ותהיינה H,K תת-חבורות נורמליות המקיימות: $H\cap K=\{e\}$.
הוכיחו כי G איזומורפית לתת-חבורה של $G/K\times G/H$.

הוכחה.

1. נתבונן בהעתקה: $f:G\to G/K\times G/H$ המוגדרת על ידי:

$$f(g)=(gH,gK)$$

זהו הומומורפיזם. יהי $g\in G$ עבורו:

$$f(g)=(gH,gK)=(H,K)=e_{G/K\times G/H}$$

מכיוון ש: $e_G\in H,K$ וגם $gH=H,gK=K$ נקבל:

$$ge_G=g\in H,K$$

ומכיוון שהחיתוך טריוויאלי: $g=e_G$.
אם כן, הגרעין של f הוא טריוויאלי ולכן f שיכון.

□

שאלות רשות

שאלה 6. תהי G חבורה ותהי $K\lhd G$ המקיימת $G/K\cong\mathbb{Z}$. הוכיחו שלכל n טבעי קיימת תת-חבורה של G מסדר n.

שאלה 7. חבורה G נקראת **מטא-אבלית** אם יש לה תת-חבורה נורמלית N כך שגם N וגם G/N אבליות. הוכיחו שכל תת-חבורה של חבורה מטא-אבלית היא גם מטא-אבלית. רמז: נסו להשתמש באחד ממשפטי האיזומורפיזם.

בהצלחה!