פתרון מועד א תשעז

14 במרץ 2017

.1

(א) משיעורי בית

(ב) אם קים $x \in G$ כך ש $o(x) = 4$ אזי החבורה ציקלית ובפרט קומטטיבית. אחרת $G = \{e, x_1, x_2, x_3\}$ כך ש $o(x_i) = 2$ (לפי לגרנז, הסדר האפשרי של איברים בחבורה זאת הוא 1/2/4 וסדר 1 הוא רק לאיבר הנטרלי ו 4 מניחים שלא קיים). לכן נקבל כי

$$\forall g \in G \, g^2 = e$$

כעת, יהיו $a, b \in G$ וצריך להראות $ab = ba$. אכן כיוון ש $(ab)^2 = e$ נקבל ע"י הכפלה של aמשמאל ו bמימין כי $a(ab)^2 b = ab$ ובנוסף

$$a(ab)^2 b = aababb = a^2 bab^2 = ba$$

.2

(א) משיעורי בית

(ב) לפי לגרנז' הסדר של H צריך לחלק את 21 ולכן $|H| \in \{1, 3, 7, 21\}$. הסדר של H הוא 21 רק אם $H = G$. הסדר של H הוא 1 רק אם $H = \{e\}$. בנוסף אם הסדר של H הוא 3 וזהו מספר ראשוני אזי $H \cong \mathbb{Z}_3$. ולכן כל תתי החבורות מסדר 3 איזומורפיות אחת לשניה (כולם איזו' ל $\mathbb{Z}_3$). מאותו נימוק, כיוון ש 7 ראשוני כל תתי החבורות מסדר 7 איזמורפיות אחת לשניה. לכן בקבוצת מחלקות השקילות של היחס בשאלה יש מחלקת שקילות של G, יש את מחלקת השקילות של $\{e\}$, יש אולי מחלקת שקילות של תת חבורה מסדר 3 (אם קיימת תת חבורה מסדר 3 אזי יש מחלקת שקילות כזאת ואם לא אז לא) ויש אולי מחלקת שקילות של תת חבורה מסדר 7 אם קיימת. סה"כ לכל היותר 4 מחלקות שקילות (ולכל הפחות 2)

.3

(א) משיעורי הבית

(ב) $G = S_3$ ו $G_1 = \langle (1,2) \rangle, G_2 = \langle (1,2,3) \rangle$ מתקיים כ י$G_1 \cap G_2 = \{id\}$ (כי $G_1 = \{id, (1,2)\}$ ו $(1,2) \notin G_2$) אבל $(1,2)(1,2,3) = (2,3) \neq (1,3) = (1,2,3)(1,2)$.

.4

(א) תת חבורה:

i. סגירות $x, x' \in \ker f$ אזי $f(x+x') = f(x) + f(x') = 0 + 0 = 0$ ולכן $x + x' \in \ker f$.

ii. $0 \in \ker f$ כי $f(0) = 0$ לכל הומו'

iii. נגדי. יהא $x \in \ker f$ אזי קיים $-x \in G$ ומתקיים $f(-x) = -f(x) = -0 = 0$ ולכן $-x \in \ker f$

בליעה: לכל $x \in \ker f$ ולכל $r \in R_1$ מתקיים כי $f(rx) = f(r)f(x) = f(r)0 = 0$ ולכן $rx \in \ker f$

(ב) בחוג $\mathbb{Z}$ תתי החוגים היחדים שלו הם $n\mathbb{Z}$ עבור $n \in \mathbb{Z}$ ואלו גם אידיאלים. בחוג $\mathbb{Q}$ תת החוג $\mathbb{Z}$ אינו אידיאל.

.5

(א) נמצא $\gcd\left(x^4 + x + 1, x + 1\right)$: מתקיים כי $x^4 + x = \left(x^3 + x^2 + x\right)(, x + 1)$ ולכן

$$1 = x^4 + x + 1 + \left(x^3 + x^2 + x\right)(, x + 1)$$

(ניתן לעשות את זה מסודר ע"י חילוק פולינומים). מודולו $x^4 + x + 1$ נקבל כי

$$[1] = [x^3 + x^2 + x][x + 1]$$

ולכן

$$[x + 1]^{-1} = [x^3 + x^2 + x]$$

(ב) הוא שדה כי $f(x) = x^5 + x^2 + 1$ אי פריק מעל $\mathbb{Z}_2$. הוכחה: נניח בשלילה כי הוא מתקפרק למכפלה $p(x)q(x)$ הדרגה של $p(x)$ לא אחד כי אז זה אומר של $f(x)$ יש שורש אבל $f(0) = f(1) = 1 \neq 0$. אם הדרגה של p היא 4 אזי הדרגה של q היא 1 ושוב נגיע לסתירה. לכן הדרגה של p היא 2 או 3 והדרגה של q היא 3 או 2 והם אי פריקים (כי אחרת שוב, יהיה גורם מדרגה 1 שזה אומר שורש ל $f(x)$). בכל מקרה יש גורם אי פריק מדרגה 2. כיוון שהפולינום מדרגה 2 שאינו פריק היחידי הוא $x^2 + x + 1$ הוא צריך לחלק את $f(x)$ אבל הוא לא. מש"ל