חדו"א 1 תרגיל מספר 1 תשפ"א - חסמים

ענו על השאלות הבאות:

חלק א

1. מצאו חסם תחתון, חסם עליון, מינימום, מקסימום לקבוצות הבאות במידה וקיימים:

(א) $A=[-5,-1]\cup(2,3)$

(ב) $A=(-1,1)\cup\{10\}$

(ג) $A=\left\{(-1)^{n-1}\cdot\left(\frac{8}{n}+1\right)\mid n\in\mathbb{N}\right\}$

(ד) $A=\left\{\frac{1}{n^2}+4\cdot(-1)^n\mid n\in\mathbb{N}\right\}$

(ה) $A=\left\{\frac{2n-3m}{n+m}\mid n,m\in\mathbb{N}\right\}$

(ו) $A=\left\{x^2\mid -3<x<2\right\}$

(ז) $A=\{x-y\mid x,y\in[0,2)\}$

(ח) $A=\left\{q+\frac{4}{q}\mid 0<q\in\mathbb{Q}\right\}$

(ט) $A=\left\{q-\frac{5}{q}\mid 0<q\in\mathbb{Q}\right\}$

2. יהא x ממשי. נניח שלכל $\epsilon>0$ מתקיים $0\le x\le\epsilon$. הוכיחו כי $x=0$.

3. תהיינה שתי תתי קבוצות של הממשיים A,B. נניח שלכל $a\in A$ ולכל $b\in B$ מתקיים כי $a\le b$ (כלומר כל איברי A קטנים או שווים לכל איברי B). הוכיחו כי $\sup A\le\inf B$.

4. תהא $A\subseteq\mathbb{R}$. נניח שקיים $M>0$ כך שלכל $a\in A$ מתקיים $M\le a$. הוכיחו $0<\inf A$.

5. תהא $A\subseteq\mathbb{R}$. נניח שלכל $a\in A$ מתקיים $0<a$. הוכיחו/הפריכו: $0<\inf A$.

6. תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ קבוצה חסומה מלעיל. נסמן $B=\{-a\mid a\in A\}$. הוכיחו ש B חסומה מלרע ומתקיים $\inf B=-\sup A$

7. תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ המקיימת כי לכל $a\in A$ מתקיים $0<a$ (כל איברי A חיוביים ובפרט A חסומה מלרע). נסמן $B=\left\{\frac{1}{a}\mid a\in A\right\}$.

(א) הוכיחו כי $\inf A\neq 0$ אמ"מ B חסומה מלעיל. הוכיחו שבמקרה זה מתקיים $\sup B=\frac{1}{\inf A}$ (כלומר החסם העליון של B שווה ל $\frac{1}{\inf A}$).

(ב) הוכיחו כי $\inf A=0$ אמ"מ B אינה חסומה מלעיל.

8. (מאתגר) עבור x ממשי נגדיר את הערך התחתון של x להיות $\lfloor x\rfloor = \max\{z\in\mathbb{Z} \mid z\le x\}$ כלומר המספר השלם הכי גדול שעדיין קטן שווה ל x. למשל $\lfloor 2.3\rfloor = 2, \lfloor -3.6\rfloor = -4$. מצאו חסם תחתון, חסם עליון, מינימום, מקסימום לקבוצה

$$A = \left\{\sqrt{x} - \lfloor\sqrt{x}\rfloor \mid x\in\mathbb{N}\right\}$$

(במידה וקיימים).

חלק ב

1. תהיינה A, B תתי קבוצות לא ריקות של $\mathbb{R}$ המקיימות ש $A\subseteq B$.

   (א) במידה וקיים $\sup B$ הוכיחו שקיים $\sup A$. בנוסף קבעו מי מהבאים מתקיים והוכיחו זאת:
   - $\sup A \le \sup B$
   - $\sup B \le \sup B$

   (ב) במידה וקיים $\inf B$ הוכיחו שקיים $\inf A$. בנוסף קבעו מי מהבאים מתקיים והוכיחו זאת:
   - $\inf A \le \inf B$
   - $\inf B \le \inf A$

2. תהיינה A, B תתי קבוצות לא ריקות של $\mathbb{R}$ שיש להם חסם עליון. נסמן $A+B = \{a+b \mid a\in A, b\in B\}$ קבעו מי מהבאים מתקיים והוכיחו זאת:
   - תמיד $\sup(A+B) \le \sup A + \sup B$ וייתכן כי $\sup(A+B) \ne \sup A + \sup B$
   - תמיד $\sup(A+B) \ge \sup A + \sup B$ וייתכן כי $\sup(A+B) \ne \sup A + \sup B$
   - תמיד $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$
   - אין קשר הכרחי בין $\sup(A+B)$ לבין $\sup A + \sup B$

3. תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ קבוצה חסומה מלעיל ויהא c מספר ממשי.
   קבעו מי מהבאים מתקיים והוכיחו זאת:
   - תמיד $\sup\{c+a \mid a\in A\} = c + \sup A$
   - תמיד $\sup\{c+a \mid a\in A\} \le c + \sup A$ וייתכן ש $\sup\{c+a \mid a\in A\} \ne c + \sup A$
   - תמיד $\sup\{c+a \mid a\in A\} \ge c + \sup A$ וייתכן ש $\sup\{c+a \mid a\in A\} \ne c + \sup A$

בהצלחה! ☺