אינפי 3 - תרגול 3

2 בנובמבר 2013

פונקציות בכמה משתנים - תחומי הגדרהת קווי גובה. משטחי רמהת גבול ורציפות

הגדרת פונקציה: נאמר כי על קבוצה $M \subseteq \mathbb{R}^2$ מוגדרת פונקציה אם לכל $\underline{x} \in M$ מותאם מס' ממשי יחיד לפי חוק נתון מראש ומסמנים $u = f(\underline{x})$. $\underset{..}{\mathrm{M}}$ נקרא תחום הגדרה, ואוסף כל ערכי הפונקציה נקרא התמונה. למשל עבור $f(\underline{x}) = \frac{1}{1+||x||^2}, \underline{x} \in \mathbb{R}^n$. תחום ההגדרה הוא $\mathbb{R}^n$ והתמונה $(0,1]$.

קו גובה/משטח רמה ב$\mathbb{R}^n$: $u = f(x,y)$ קו גובה הוא עקומה של נק' (x,y), הפותרות את המשוואה $c \in \mathbb{R} \quad f(x,y) = c,$.

משטח רמה: עבור $u = f(x,y,z)$ פתרון של המשוואה $c \in \mathbb{R} \quad f(x,y,z) = c,$ נראה משטח רמה.

דוגמאות:

1. למצוא את תחום ההגדרה של: $f(\underline{x}) = \frac{1}{\sqrt{1-\sum_{i=1}^{n} x_i^2}}, \underline{x} \in \mathbb{R}^n$. ת. ההגדרה הוא $1 - \sum x_i^2 > 0 \Leftarrow \sum_{i=1}^{n} x_i^2 < 1 \Leftarrow B(0,1)$ כדור היחידה הפתוח. התמונה היא $[1, \infty)$. (מוכיחים גם לכל $u \geq 1$ קיים $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ כך ש$\Leftarrow u = \frac{1}{\sqrt{1-||x||^2}}$ $1 - ||x||^2 = \frac{1}{u^2} \Rightarrow ||x||^2 = 1 - \frac{1}{u^2} > 0 \quad ,\sqrt{1-||x||^2} = \frac{1}{u} \leq 1$ (א).

2. <u>קווי גובה:</u> מהי מפת כל קוי הגובה של הפונקציה: $f(x,y) = |x| + |y|$.

תשובה:ת. ההגדרה הוא כל המישור $\mathbb{R}^2$.

<u>קוי גובה:</u> עבור $c < 0$ לא קיים פתרון למשוואה $f(x,y) = \underbrace{|x| + |y|}_{\geq 0} = c < 0$.

עבור $f(x,y) = |x| + |y| = c\ hbbc > 0$ זה ריבוע נטוי, למשל עבור $c = 1$ נקבל $|x| + |y| = 1$. עבור $c = 0$ מקבלים רק את $(0,0)$.

גבול ורציפות

עבור פונקציה $u = f(\underline{x})$, המוגדרת בקבוצה $M \subseteq \mathbb{R}^n$. נגדיר גבול בנקודה כך : נאמר כי $\lim_{x \to \underline{x}^0} f(\underline{x}) = L$, אם לכל $0 < \epsilon$ יש $0 < \delta$, כך שלכל $\underline{x} \in B(\underline{x}_0, \delta)$ מתקיים: $|f(\underline{x}) - L| < \epsilon$ (לפונ' וקטורית $\vec{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ מגידרים בדומה עם נורמה $\vec{F} = (F_1(\underline{x}), F_2(\underline{x}), \ldots, F_n(\underline{x}))$.

הפרכת טיעון גבול עבור פונקציה ב-$\mathbb{R}^2$: $u = f(x,y)$, כדי להראות שלא קיים גבול: $\lim_{\underline{x} \to (x_0, y_0)} f(x,y)$ מספיק לקחת שני מסלולים (שתי עקומות ב-$\mathbb{R}^2$) העוברות דרך (x_0, y_0) ועל עקומות אלה נקבל גבולות שונים L_1, L_2. [או לקחת שני סדרות ב-$\mathbb{R}^2$, המתכנסות ל-(x_0, y_0) כך שערכי f על סדרות אלה מתכנסות ל$L_1 \neq L_2$ בהתאמה].

דוגמאות:

1. האם קיים הגבול לפונקציה:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

בנקודה $(0,0)$? תשובה: עבור $y = x$ הגבול הוא $1/2$ ועבור $x = 0, y \to 0$ הגבול הוא 0.

2. אותה שאלה עבור

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

אינטואטיבית : פולינום ממעלה 3 (במונה) שואף ל-0 הרבה יותר מהר מפולינום ממעלה 2 (במכנה) ולכן ככל הנראה $\lim_{(x,y) \to (0,0)} g(x,y) = 0$.

הוכחה: נפעיל את כלל הסנדוויץ':

$$0 \leq |g(x,y)| = |y| \cdot \left| \frac{x^2}{x^2+y^2} \right| \leq |y| \overset{(x,y)\to 0}{\to} 0$$

קיבלנו: $\lim_{(x,y) \to (0,0)} |g(x,y)| = 0$ ולכן גם $\lim g(x,y) = 0$.

רציפות: תהי $u = f(\underline{x})$ מוגדרת ב-$D \subseteq \mathbb{R}^n$. נאמר כי f רציפה ב-$\underline{x}^0 \in D$ אם כן: $\lim_{\underline{x} \to \underline{x}^o} f(\underline{x}) = f(\underline{x}^0)$.

1. לבדוק את רציפות הפונקציה:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+x^3+y^3}{x^2+y^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,\text{otherwise} \end{cases}$$

תשובה: ברור כי f רציפה בכל הנקודות $(x,y) \neq (0,0)$, כמנה של פונקציות רציפות (פול' ב־$\mathbb{R}^2$) עם מכנה $\neq 0$. בראשית הצירים $(x_0,y_0) \neq (0,0)$, הגבול $\lim_{(x,y\to(0,0)} f(x,y)$ לא קיים כי אם ניקח $y = kx$, נקבל:

$$\lim_{x\to 0} f(x,kx) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+x^3+k^3x^3}{x^2+k^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1+x+k^3x}{1+k^2} = \frac{1}{1+k^2}$$

$\Leftarrow$על כל ישר מהצורה $y = kx$, נקבל גבול שונה (תלוי ב־k) ולכן אין גבול$\Leftarrow f$ לא רציפה ב־$(0,0)$.

2. האם ניתן להגדיר את הפונקציה $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{\sin(x^2+y^2)}$ בנקודה $(0,0)$ כך שהיא תהיה רציפה?

תשובה: כן, כי $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{sin(x^2+y^2)}$ ולפי משפט על הרכבת גבולות $t = x^2+y^2 \to 0$ ולכן $\lim \frac{t}{\sin t} = 1 =$. לכן: $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{\sin(x^2+y^2)} & ,(x,y)\neq(0,0) \\ 1 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ רציפה ב$(0,0)$.

3. להוכיח שאם $f(x,y)$ רציפה בD (לפי x וy ביחד), אז היא רציפה.

הוכחה: $f(x,y)$רציהם ב־$D \Leftarrow$ היא רציסה בכל נקודה $(x_0,y_0) \in D$, כלומר:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

כלומר שאם $||(x-y)-(x_0,y_0)|| < \delta$ אזי:

$$|f(x,y) - f(x_0,y_0)| < \epsilon$$

כעת עבור $|x - x_0| < \delta$ נרצה להוכיח:

$$|f(x,y) - f(x_0,y)| < \epsilon$$

עבור y קבוע אם נבחר $y = y_0$ נקבל הדרוש ולכן f רציפה לפי x. באופן דומה מתוך הרציפות לפי y.

הערה: הכיוון ההפוך של הטענה לא נכון, הפונקציה המפריכה היא המופיעה בדוגמה 1.

עבור פונקציות ב־3 משתנים:

1. האם $f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3+z^3}{x^2+y^2+z^2} & (x,y,z)\neq(0,0,0) \\ 0 & \text{else} \end{cases}$ רציפה בראשית?

תשובה: f רציפה, הגבול $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z) = 0$ נובע מסנדוויץ' ואי"ש המשולש.

2. להוכיח כי $g(x,y)=\max\{\sin(x+y),y^3\}$ רציפה ב־$\mathbb{R}^2$.

הוכחה: $\max\{a,b\}=\frac{a+b+|a-b|}{2}$ ולכן $g(x,y)=\frac{\sin(x+y)+y^3+|\sin(x+y)-y^3|}{2}$. זה סכום והרכבה של פונקציות רציפות, ולכן היא רציפה.

3. אותה שאלה עבור: $f(x,y)=\begin{cases}1-||\underline{x}|| & ||\underline{x}||\leq 1\\ 0 & \text{else}\end{cases}$. נוכיח כי לכל $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ מתקיים: $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$.

נפריד ל־3 מקרים:

(א) $||(x_0,y_0)||<1$

(ב) $||(x_0,y_0)||=1$

(ג) $||(x_0,y_0)||<1$

עבור (a) נסתכל ב$B((0,0),1)$ קבוצה פתוחה ב־$\mathbb{R}^2$, לכן קיימת סביבה של (x_0,y_0), המוכלת בעיגול זה ואז $f(x,y)=1-\sqrt{x^2+y^2}$ רציפה ב$B((0,0),1)$ כהפרש וכהרכבה של פונקציות רציפות.