מבנים דיסקרטיים – תרגיל 5

כל סעיף שווה 10 נקודות.

שאלה 1

א. תהי G חבורה. נגדיר $Z(G) = \{g \in G \mid \forall h \in G: gh = hg\}$. הוכיחו כי $Z(G) \trianglelefteq G$.

ב. הוכיחו ישירות לפי ההגדרה של תת חבורה נורמלית ש-$SL_n(\mathbb{R}) \trianglelefteq GL_n(\mathbb{R})$. [אין קשר לסעיף א.]

שאלה 2

א. תהי G חבורה סופית ויהי $g \in G$. הוכיחו כי $o(g)$ מחלק את $|G|$. [רמז: $o(g)$ קשור לגודל של תת חבורה מסויימת.]

ב. הוכיחו שאם $|G| = p^n$ עבור p ראשוני אז קיים $g \in G$ כך ש-$o(g) = p$.[1]

שאלה 3

א. הראו ש-$SL_n(\mathbb{R}) \trianglelefteq GL_n(\mathbb{R})$ ו-$GL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^*$.

ב. הראו ש-$\mathbb{R}_+ \trianglelefteq \mathbb{C}^*$ ומתקיים $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}_+ \cong \mathbb{T}$ כאשר $\mathbb{T} = \{z: |z| = 1\}$ ו-$\mathbb{R}_+ = \{r \in \mathbb{R}: r > 0\}$.

ג. הראו ש-$\mathbb{R}_+ \trianglelefteq \mathbb{R}^*$ ו-$\mathbb{R}^*/\mathbb{R}_+ \cong \{\pm 1\}$. מה הקוסטים של $\mathbb{R}_+$ ב-$\mathbb{R}^*$?

ד. **רשות:** הראו כי $\{\pm 1\} \trianglelefteq \mathbb{C}^*$ ו-$\mathbb{C}^*/\{\pm 1\} \cong \mathbb{C}^*$.

[בחבורות $\mathbb{C}^*, \mathbb{R}^*, \mathbb{R}_+, \mathbb{T}, \{\pm 1\}$ הפעולה היא כפל מספרים רגיל. אין צורך להוכיח כי אלו חבורות.]

[הדרכה: בכיתה אמרנו שכדי להוכיח $G/K \cong H$ מספיק למצוא הומומורפיזם על $f: G \to H$ כך ש-$\ker f = K$ ואז להשתמש במשפט האיזומורפיזם הראשון. (שימו לב שזה אומר ש-$K \trianglelefteq G$ כי גרעין של הומומורפיזם הוא תמיד נורמלי).]

שאלה 4

תהי G חבורה ו-$H_1, H_2 \leq G$. הוכיחו כי אם $\gcd(|H_1|, |H_2|) = 1$ אז $H_1 \cap H_2 = \{e\}$. [רמז: מסקנה ממשפט לגרנז'.]

שאלה 5

תהי G חבורה סופית.

א. נניח כי $H \trianglelefteq G$. הוכיחו כי לכל $g \in G$ מתקיים $g^{|G/H|} \in H$. [הדרכה: מספיק להראות $g^{|G/H|}H = H$ (מדוע?). הפעילו את סעיף א של שאלה 3 על החבורה G/H.]

ב. נניח כי $H_1, H_2 \trianglelefteq G$ חבורות שונות המקיימות $|H_1| = |H_2| > 1$. הוכיחו כי קיים $|G| > n$ כך שלכל $g \in G$ מתקיים $g^n = e$. [רמז: השתמשו בסעיף א עם $H = H_1$ ו-$H = H_2$.]

ג. **רשות:** הראו כי אם G צקלית ו-k מחלק את $|G|$ אז ל-G יש בדיוק תת חבורה אחת מגודל k.

[1] הערה: זה מקרה פרטי של משפט קושי (זה אותו קושי מאינפי'): אם G חבורה סופית ו-p מחלק את $|G|$ אז קיים ב-G איבר מסדר p.