

תרגיל 10 - לינארית למורים

26 בינואר 2017

שאלה 1
הראו שהקבוצה $S = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ היא קבוצה אורתוגונאלת, הסק מכך שהיא מהווה בסיס למרחב \mathbb{R}^3 .

שאלה 2

אם $v \in S^\perp$ אזי $v \in \text{span}(S)^\perp$ (כלומר מספיק להיות מאונך לקבוצה פורשת)

שאלה 3
יהיו $S = \{u, v\}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. מצאו בסיס ל- S^\perp .

שאלה 4

תהי $v = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 5 \end{pmatrix}$, $u = (1, 2, 3, 4, 5)$, $w = (1, 2, 3, 3, 2)$. תמצא את כל הוקטורים שאורתוגונאליים ל- S .

שאלה 5

הוכיחו את משפט פיתגורס: יהיו שני וקטורים v_1, v_2 אורתוגונאליים זה לזה אזי,

$$\|v_1 + v_2\|^2 = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2$$

הדרכה: התבוננו בביטוי הבא:

$$\|v_1 + v_2\|^2 = \langle v_1 + v_2, v_1 + v_2 \rangle$$

שאלה 6

תזכורת:

יהיו v_1, v_2, \dots, v_n בסיס אורתוגונאלי של מרחב W אזי עבור כל $w \in W$, אזי
 $w = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\langle v_i, w \rangle}{\|v_i\|^2} \cdot v_i$, כלומר כל w הוא צירוף לינארי עם קטורי הבסיס האורתונורמלי
עם מקדמים $\frac{\langle v_i, w \rangle}{\|v_i\|^2}$ של v_i .

חזרה לשאלה:

בהינתן 3 וקטורים $v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = (2, 1, -4)$, $v_3 = (3, -2, 1)$, ונניח שנתון $w = (1, 5, 12)$, הוכח ש- $\{v_1, v_2, v_3\}$ היא קבוצה אורתונורמלית, הסק מכך שהיא מהווה בסיס למרחב \mathbb{R}^3 , ובעזרת התזכורת הצג את w כצירוף לינארי של v_1, v_2, v_3 (רמז: תמצא את המקדמים של הצירוף בעזרת הנוסחה מהתזכורת)

שאלה 7

הראה שהוקטורים $(x+y), (x-y)$ אורתוגונאליים אם ורק אם $\|x\| = \|y\|$.

שאלה 8

מצא קבוצה של כל הוקטורים אשר אורתוגונאליים לוקטורים $(1, 1, 1)$ ו- $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, כזכור קבוצה זו מהווה תת מרחב של \mathbb{R}^3 , מצא בסיס לתת מרחב זה והשלם אותו עד לבסיס למרחב \mathbb{R}^3 .

(רמז: עוד וקטורים בת"ל כך שאיחוד של איברי הבסיס של תת מרחב הנ"ל עם הוקטורים האלה יהיה בסיס למרחב \mathbb{R}^3).

שאלה 9

נתונים הוקטורים

$u = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, נסמן ב- W אוסף כל הוקטורים של \mathbb{R}^5 שניצבים לוקטורים הנתונים:

(א) הראה ש- W תת מרחב ווקטורי.

(ב) מצא בסיס ומימד עבור W .