תרגיל מספר 8

1. מצאו את סדר האפס של כל אחת מהפונקציות הבאות בנקודות z_0 הנתונות. במידה והנקודה z_0 לא נתונה יש למצוא את סדר האפס בכל הנקודות בהן הפונקציה מתאפסת.

א. $f(z) = \tan(z)$ ב. $g(z) = e^{z^2} - 1$

ג. $h(z) = z^2 \cdot \sin z - z \cdot \sin^2 z \ \ , z_0 = \pi$

ד. $w(z) = \sin\left(z^3\right) - \sin^3(z), z_0 = 0$

<u>פתרון</u>: א. הפונקציה f מתאפסת כאשר $z_k = \pi k$. נוכיח שבנקודות אלו ל־f יש אפסים פשוטים. אכן, ע"י גזירה של f והצבה $z = \pi k$ נקבל

$$f'(z) = \frac{1}{\cos^2 z} \Rightarrow f'(\pi k) = \frac{1}{\cos^2(\pi k)} = \frac{1}{(-1)^{2k}} = 1 \neq 0$$

כיוון שהנגזרת לא מתאפסת בנקודות z_k נובע שכל האפסים הם פשוטים.

ב. הפונקציה g מתאפסת כאשר $z^2 = 2\pi i k$ או $z = \sqrt{2\pi|k|}\sqrt{\pm i}$. כיוון ש־

$$\sqrt{i} = e^{\frac{i\pi}{4}}, e^{\frac{5i\pi}{4}}, \quad \sqrt{-i} = e^{\frac{3i\pi}{4}}, e^{\frac{7i\pi}{4}}$$

נובע ש־ g מתאפסת בנקודות

$$z_{n,m} = \sqrt{2\pi n} e^{\frac{(2m+1)i\pi}{4}}, n \in \mathbb{N}, m = 0, 1, 2, 3.$$

כדי לבדוק מה הסדר של כל אפס, נגזור את g ונקבל $g'(z) = 2ze^{z^2}$. כיוון שהפונקציה e^{z^2} לא מתאפסת באף נקודה נובע שכל האפסים $z_{n,m}$ הם פשוטים פרט לנקודה $z_0 = 0$. כיוון ש־$g''(z) = 2e^{z^2} + 4z^2e^{z^2}$ ו־ $g''(0) = 2 \neq 0$ נובע ש־z_0 היא אפס מסדר שני.

ג. נרשום את h בצורה $h(z) = z \cdot \sin(z) \cdot (z - \sin(z))$. לפונקציה $h_1(z) = z \cdot \sin(z)$ יש אפס מסדר ראשון ב־$z = \pi$ כי

$$h_1'(z) = \sin(z) + z \cdot \cos(z),\ h_1'(\pi) = -\pi \neq 0.$$

הפונקציה $h_2(z) = z - \sin(z)$ לא מתאפסת ב־$z = \pi$. לכן מכלל המכפלה עבור מציאת סדר של האפס נובע שלפונקציה $h(z) = h_1(z) \cdot h_2(z)$ יש אפס מסדר ראשון ב־$z = \pi$.

ד. נציב את הזהות $\sin^3(z) = \frac{1}{4}(3\sin z - \sin(3z))$ בפונקציה w ונפתח את w לטור טיילור

$$w(z) = \sin(z^3) - \frac{3}{4}\sin z + \frac{1}{4}\sin(3z)$$

$$= \left(z^3 - \frac{z^9}{3!} + \frac{z^{15}}{5!} - ...\right) - \frac{3}{4}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - ...\right) + \frac{1}{4}\left(3z - \frac{3^3z^3}{3!} + \frac{3^5z^5}{5!} - ...\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot z^5 - \frac{13}{120}\cdot z^7 + ...$$

לכן כיוון שטור טיילור של w סביב $z_0 = 0$ מתחיל מהחזקה החמישית נובע של־w יש אפס מסדר חמישי ב־$z_0 = 0$.

2. עבור הפונקציות הבאות, קבעו האם לפונקציה, בנקודות הנתונות, יש סינגולריות סליקה, קוטב או עיקרית. במידה והסינגולריות היא קוטב קבעו מה הסדר של הקוטב.

א. $f(z) = \cot z, \quad z_k = \pi k$

ב. $g(z) = \dfrac{(z-\pi)^2}{\sin^5(z)} - \dfrac{1}{(1+\cos z)^2}, \quad z = \pi$

ג. $h(z) = \dfrac{1}{e^{\frac{1}{z}} - 1}, \;\; z_0 = 0, \;\; z_k = \dfrac{1}{2i\pi k} \; (k \neq 0)$

ד. $w(z) = \dfrac{(\cos^2(z) - 1)^4}{(e^{z^4} - 1 - z^4)\sin^2(z)}, \quad z_0 = 0$

<u>פתרון:</u> א. נראה של־f יש קוטב מסדר ראשון בנקודות $z_k = \pi k$. אכן

$$\lim_{z\to z_k}(z - z_k)f(z) = \lim_{z\to\pi k}(z - \pi k)\cot z = \lim_{z\to\pi k}\frac{(z-\pi k)\cos z}{\sin z}$$

$$\underset{\text{לופיטל}}{=} \lim_{z\to\pi k}\frac{\cos z - (z - \pi k)\sin z}{\cos z} = 1 \neq 0.$$

ב. נגדיר את הפונקציות

$$g_1(z) = \frac{(z-\pi)^2}{\sin^5(z)}, \quad g_2(z) = \frac{1}{(1+\cos z)^2}.$$

נוכיח של־g_1 יש קוטב מסדר שלישי ב־$z=\pi$. אכן

$$\lim_{z\to\pi}(z-\pi)^3 g_1(z)=\lim_{z\to\pi}(z-\pi)^3\frac{(z-\pi)^2}{\sin^5(z)}=\lim_{z\to\pi}\frac{(z-\pi)^5}{\sin^5(z)}$$

$$=\lim_{z\to\pi}\left(\frac{z-\pi}{\sin z}\right)^5=\left(\lim_{z\to\pi}\frac{z-\pi}{\sin z}\right)^5=(-1)^5=-1\neq 0.$$

כמו כן, לפונקציה g_2 יש אפס מסדר רביעי ב־$z=\pi$. אכן

$$\lim_{z\to\pi}(z-\pi)^4 g_2(z)=\lim_{z\to\pi}\frac{(z-\pi)^4}{(1+\cos z)^2}=\lim_{z\to\pi}\frac{(z-\pi)^4}{\left(1+\left(2\cos^2\left(\frac{z}{2}\right)-1\right)\right)^2}$$

$$=\lim_{z\to\pi}\frac{(z-\pi)^4}{4\cos^4\left(\frac{z}{2}\right)}=\frac{1}{4}\lim_{z\to\pi}\left(\frac{z-\pi}{\cos\left(\frac{z}{2}\right)}\right)^4=\frac{1}{4}\left(\lim_{z\to\pi}\frac{z-\pi}{\cos\left(\frac{z}{2}\right)}\right)^4$$

$$\underset{\text{לופיטל}}{=}\frac{1}{4}\left(\lim_{z\to\pi}\frac{1}{-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{z}{2}\right)}\right)^4=\frac{1}{4}(-2)^4=4\neq 0.$$

לכן קיימות פונקציות אנליטיות g_1^*,g_2^* בסביבה של $z_0=\pi$ כך ש־ $g_1^*(\pi),g_2^*(\pi)\neq 0$ ו־

$$g_1(z)=\frac{g_1^*(z)}{(z-\pi)^3},\quad g_2(z)=\frac{g_2^*(z)}{(z-\pi)^4}.$$

לכן כיוון ש־

$$g(z)=g_1(z)-g_2(z)=\frac{g_1^*(z)}{(z-\pi)^3}-\frac{g_2^*(z)}{(z-\pi)^4}$$

$$=\frac{1}{(z-\pi)^4}\left((z-\pi)g_1^*(z)-g_2^*(z)\right)=\frac{g^*(z)}{(z-\pi)^4}$$

כאשר

$$g^*(z)=(z-\pi)g_1^*(z)-g_2^*(z),\ g^*(\pi)=-g_2^*(\pi)\neq 0.$$

לכן ל־g יש קוטב מסדר רביעי ב־$z_0=\pi$.

ג. נראה שבנקודות $z=z_k$ ל־h יש קוטב מסדר ראשון. אכן

$$\lim_{z\to z_k}(z-z_k)h(z)=\lim_{z\to\frac{1}{2\pi ik}}\frac{z-\frac{1}{2\pi ik}}{e^{\frac{1}{z}}-1}\underset{\text{לופיטל}}{=}\lim_{z\to\frac{1}{2\pi ik}}\frac{1}{-\frac{1}{z^2}e^{\frac{1}{z}}}=4\pi^2k^2\neq 0.$$

כעת נשים לב שמהגדרה של נקודה סינגולארית נובע שלא ניתן לסווג את הנקודה $z_0 = 0$. אכן, לא קיים עיגול פתוח $|z| < \delta$ סביב $z_0 = 0$ שבו ל־h אין נקודות סינגולאריות. לכן $z_0 = 0$ היא לא נקודה סינגולארית.

ד. נגדיר את הפונקציות

$$w_1(z) = \left(\cos^2(z) - 1\right)^4, \quad w_2(z) = e^{z^4} - 1 - z^4, \quad w_3(z) = \sin^2(z)$$

ונמצא את סדר האפס של כל אחת מפונקציות אלו בנקודה $z_0 = 0$. כיוון ש־

$$\cos^2(z) - 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2z) - 1 = \frac{1}{2}\cos(2z) - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{(2z)^2}{2} + \frac{(2z)^4}{24} - ...\right) - \frac{1}{2} = -z^2 + \frac{z^4}{3} - ...$$

נובע של־$\cos^2(z) - 1$ יש אפס מסדר שני ב־$z_0 = 0$ ולכן מכלל המכפלה נובע של־w_1 יש אפס מסדר $4 \cdot 2 = 8$ ב־$z_0 = 0$.
כיוון ש־

$$w_2(z) = e^{z^4} - 1 - z^4 = 1 + z^4 + \frac{z^8}{2} + ... - 1 - z^4 = \frac{z^8}{2} + ...$$

נובע של־w_2 יש אפס מסדר שמיני ב־$z_0 = 0$. כמו כן קל לבדוק של־$\sin$ יש אפס מסדר ראשון ב־$z_0 = 0$ ולכן ל־$w_3(z) = \sin^2(z)$ יש אפס מסדר שני ב־$z_0 = 0$.
לכן אפשר לרשום

$$w_1(z) = z^8 w_1^*(z), \quad w_2(z) = z^8 w_2^*(z), \quad w_3(z) = z^2 w_3^*(z).$$

כאשר w_1^*, w_2^*, w_3^* הן פונקציות אנליטיות בסביבה של $z_0 = 0$ ו־ $w_1(0), w_2(0), w_3(0) \neq 0$. לכן

$$w(z) = \frac{w_1(z)}{w_2(z) \cdot w_3(z)} = \frac{w_1^*(z)}{w_2^*(z) \cdot w_3^*(z)} \cdot \frac{1}{z^2} = \frac{w^*(z)}{z^2}$$

כאשר

$$w^*(z) = \frac{w_1^*(z)}{w_2^*(z) \cdot w_3^*(z)}, w^*(0) = \frac{w_1^*(0)}{w_2^*(0) \cdot w_3^*(0)} \neq 0.$$

לכן ל־w יש קוטב מסדר שני ב־$z_0 = 0$.

3. פתחו לטור לורן את הפונקציות הבאות בנקודות הנתונות וקבעו בעזרת טור לורן את סוג הסינגולאריות של הפונקציה (במידה והסינגולאריות היא קוטב יש לקבוע מה הסדר שלו):

א. $f(z) = e^{\frac{1}{z}} \cos\left(\frac{1}{z}\right), \quad z = 0$

ב. $g(z) = \frac{1}{(z^2+4)^2}, \quad z = 2i$

ג. $h(z) = \frac{1}{1-\cos z}, \quad z = 0$

<u>הערה</u>: בסעיף ג' מספיק למצוא את המקדמים c_n של טור לורן עבור $|n| \leq 2$.

<u>פתרון</u>: א. נפתח את f לטור לורן סביב $z_0 = 0$:

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}} \cos\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2} e^{\frac{1}{z}} \left(e^{\frac{i}{z}} + e^{-\frac{i}{z}}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{1+i}{z}} + e^{\frac{1-i}{z}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{(1+i)^n}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{(1-i)^n}{z^n}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{\frac{n}{2}}}{n!}\frac{e^{\frac{in\pi}{4}}}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{\frac{n}{2}}}{n!}\frac{e^{-\frac{in\pi}{4}}}{z^n}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{\frac{n}{2}} \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)}{n!} \cdot \frac{1}{z^n}.$$

לכן יש אינסוף חזקות שליליות לטור לורן עם מקדמים שונים מאפס. לכן ל־f יש סינגולאריות עיקרית ב־$z_0 = 0$.

ב. קודם נפרק את g לשברים חלקיים

$$g(z) = \frac{1}{z^2+4} = \frac{1}{4i}\left(\frac{1}{z-2i} - \frac{1}{z+2i}\right),$$

לכן

$$\frac{1}{(z^2+4)^2} = -\frac{1}{16}\left(\frac{1}{(z-2i)^2} - \frac{2}{(z-2i)(z+2i)} + \frac{1}{(z+2i)^2}\right)$$

$$= -\frac{1}{16}\left(\frac{1}{(z-2i)^2} + \frac{i}{2}\frac{1}{z-2i} - \frac{i}{2}\frac{1}{z+2i} + \frac{1}{(z+2i)^2}\right) \quad (1).$$

כמו כן,

$$\frac{1}{z+2i}=\frac{1}{z-2i+4i}=\frac{1}{4i}\frac{1}{1+\frac{z-2i}{4i}}=\frac{1}{4i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(4i)^n}(z-2i)^n \quad (2).$$

אם נגזור את המשוואה האחרונה לפי z נקבל

$$-\frac{1}{(z+2i)^2}=\frac{1}{4i}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(4i)^n}(z-2i)^{n-1} \quad (3).$$

לכן אם נציב את משוואות (2) ו־(3) במשוואה (1) נקבל

$$\frac{1}{(z^2+4)^2}=-\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{(z-2i)^2}-\frac{i}{32}\cdot\frac{1}{z-2i}$$

$$+\frac{1}{128}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(4i)^n}(z-2i)^n-\frac{i}{64}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(4i)^n}(z-2i)^{n-1}.$$

מהצורה של טור לורן נובע של־g יש קוטב מסדר שני ב־$z=2i$.

ג. מפיתוח טיילור של קוסינוס נקבל

$$h(z)=\frac{1}{1-\cos z}=\frac{1}{1-1+\frac{z^2}{2!}-\frac{z^4}{4!}+\frac{z^6}{6!}-...}$$

$$=\frac{1}{\frac{z^2}{2}\left(1-\left(\frac{z^2}{12}-\frac{z^4}{360}+...\right)\right)}=\frac{2}{z^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{12}\left(z^2-\frac{z^4}{30}+...\right)}$$

$$=\frac{2}{z^2}\cdot\left(1+\frac{1}{12}\left(z^2-\frac{z^4}{30}+...\right)+\frac{1}{12^2}\left(z^2-\frac{z^4}{30}+...\right)^2\right)$$

$$=\frac{2}{z^2}\cdot\left(1+\frac{z^2}{12}+\frac{3z^4}{5\cdot 12^2}+...\right).$$

לכן ל־h יש קוטב מסדר שני ב־$z_0=0$.