פתרון 10 תרגיל

תרגיל 1.

פתרון : נמצא פ"א, ע"ע, מ"ע

$$f_A(\lambda)=\left|\begin{pmatrix}\lambda-1&1&1\\1&\lambda-1&1\\1&1&\lambda-1\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}\lambda-1&1&1\\1&\lambda-1&1\\\lambda+1&\lambda+1&\lambda+1\end{pmatrix}\right|=(\lambda+1)\left|\begin{pmatrix}\lambda-1&1&1\\1&\lambda-1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\right|=$$

$$=(\lambda+1)\left|\begin{pmatrix}\lambda-2&0&0\\0&\lambda-2&0\\1&1&1\end{pmatrix}\right|=(\lambda+1)(\lambda-2)^2$$

מ"ע

$$V_2=N(\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\-1&-1&-1\end{pmatrix})=N(\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix})=span\left\{v_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},v_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$V_{-1}=N(\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix})=N(\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\0&0&0\end{pmatrix})=N(\begin{pmatrix}0&3&-3\\-1&2&-1\\0&0&0\end{pmatrix})=N(\begin{pmatrix}0&3&-3\\1&-2&1\\0&0&0\end{pmatrix})=N(\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix})$$

נפעיל גרם שמידט על כל מ"ע בנפרד:

$$w_1 = v_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

$$w_2 = v_2-\frac{\langle v_2,w_1\rangle}{\|w_1\|^2}w_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2\\-1\\1/2\end{pmatrix}$$

ננרמל כדי למצוא בסיס או"נ ל V_2

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{3/2}}\begin{pmatrix}1/2\\-1\\1/2\end{pmatrix}\right\}=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right\}$$

ננרמל את v_3 לקבל בסיס או"נ ל V_{-1}

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

ונגדיר

$$P=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}\sqrt{3}&1&\sqrt{2}\\0&-2&\sqrt{2}\\-\sqrt{3}&1&\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

להיות מטריצה של הו"ע המנורמלים ואז

$$P^tAP=\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&-1\end{pmatrix}$$

תרגיל 2.

פתרון. טענה: אם v_i הוא ו"ע של A השייך לע"ע λ_i, אז v_iהוא ו"ע של B השייך לע"ע

$$\lambda_i^2-6\lambda_i+11$$

(תוכיחו בבית)

ל-A יש n ו"ע, כל ו"ע v_i מתאים לע"ע λ_i לפי הטענה v_i הוא ו"ע של B המתאים לע"ע

$$\lambda_i^2-6\lambda_i+11$$

, בפרט ל B יש n ו"ע ולכן לכסינה. בנוסף, הע"ע של B הם

$$\lambda^2-6\lambda+11$$

עבור λ ע"ע של A. כיוון ש

$$\lambda^2-6\lambda+11\neq 0$$

לכל $\lambda\in\mathbb{R}$ נקבל כי 0 אינו ע"ע של B ולכן B הפיכה.

תרגיל 3. א. הוכיחו: אם T,S מטריצות אונטריות אז גם ST מטריצה אונטרית.

$$(ST)^*=T^*S^*=T^{-1}S^{-1}=(ST)^{-1}$$

ב. הוכיחו: אם T,S מטריצות הרמטיות אז ST הרמטי אם ורק אם ST=TS.

$$(ST)^*=ST\Leftrightarrow T^*S^*=ST\Leftrightarrow TS=ST$$

תרגיל 4.

<u>**פתרון**</u>

יהי $B=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ בסיס אורתונורמלי.

$[T]_B=\begin{pmatrix} i & 0 & 0\\ i & 1+i & 0\\ i & 1+i & 2+i\end{pmatrix} \Rightarrow [T]_B^*=\begin{pmatrix} -i & -i & -i\\ 0 & 1-i & 1-i\\ 0 & 0 & 2-i\end{pmatrix}$ ואז ההעתקה הצמודה היא

$T^*(z_1,z_2,z_3)=(-iz_1-iz_2-iz_3,(1-i)z_2+(1-i)z_3,(2-i)z_3)$.

תרגיל 5. א.

פתרון: נבדוק שמתקיימות שלושת התכונות:

1. $\langle \alpha A_1+A_2,B\rangle = tr\left((\alpha A_1+A_2)B^*\right)=\alpha tr\left(A_1B^*\right)+tr\left(A_2B^*\right)=\alpha\langle A_1,B\rangle+\langle A_2,B\rangle$.

2. נציין ש $tr(A)=tr\left(A^t\right)$. מתקיים

$$\langle B,A\rangle = tr\left(BA^*\right)=tr\left(B\bar{A}^t\right)=tr(\bar{A}B^t)=\overline{\langle A\bar{B}^t\rangle}=\overline{\langle A,B\rangle}$$

3.

$$\begin{aligned}\langle A,A\rangle &= tr\left(AA^*\right)=\sum_{i=1}^{m}R_i\left(A\right)C_i\left(A^*\right)=\sum_{i=1}^{m}R_i\left(A\right)C_i\left(\bar{A}^t\right)=\Sigma_{i=1}^{m}R_i(A)\overline{R_i^t\left(A\right)}=\\ &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^2\geq 0\end{aligned}$$

קל לראות שוב, שיש שוויון אם ורק אם $a_{ij}=0$ לכל i,j.

ב.

ניקח את B להיות בסיס אותונורמלי:

$B=\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$

וודאו שאתם מבינים למה!

נמצא מטריצה מייצגת:

$$[T]_B^B=\begin{pmatrix} i+1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & i & 1 & 0\\ 0 & 1 & i & 0\\ 0 & 0 & 0 & i+1\end{pmatrix}$$

כיוון ש B בסיס אורתונורמלי מתקיים

$$[T^*]_B^B=[T\ \ ]_B^{B^*}=\begin{pmatrix} i-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -i & 1 & 0\\ 0 & 1 & -i & 0\\ 0 & 0 & 0 & -i+1\end{pmatrix}$$

נקבל ש

$$T^*\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}i-1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$
$$T^*\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0 & -i\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$
$$T^*\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -i & 0\end{pmatrix}$$
$$T^*\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1-i\end{pmatrix}$$

ולכן:

$$T^*\left(\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\right)=T^*\left(\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)+T^*\left(\begin{pmatrix}0 & b\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)+T^*\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\ c & 0\end{pmatrix}\right)+T^*\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & d\end{pmatrix}\right)$$
$$=aT^*\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)+cT^*\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right)+bT^*\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)+dT^*\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\ =$$
$$a\begin{pmatrix}i-1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0 & -i\\ 1 & 0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0 & 1\\ -i & 0\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1-i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a(i-1) & -ic+b\\ c-ib & d(1-i)\end{pmatrix}$$

תרגיל 6.

א. כפי שראינו בהגדרה $(v-\pi_U(v))\in U^{\perp}$ ולכן $\langle v-\pi_U(v),u\rangle=0$

נשתמש בליניאריות ברכיב הראשון ונעביר אגף על מנת לקבל $\langle v,u\rangle=\langle \pi_U(v),u\rangle$.

ב.

נמצא תחילה בסיס אורתוגונלי בעזרת תהליך גראם שמידט

$$u_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}, u_2=\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}-\frac{\left\langle\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\langle\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\right\rangle}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{5}{6}\\\frac{11}{6}\\\frac{4}{3}\end{pmatrix}$$

הבסיס האורתוגונלי על פי תהליך גראם שמידט הוא $\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\frac{5}{6}\\\frac{11}{6}\\\frac{4}{3}\end{pmatrix}\right\}$.

נחשב את ההיטל על פי ההגדרה $B=\{w_1,w_2,\ldots,w_n\}$ בסיס אורתוגונלי לתת המרחב W, אז ההיטל הינו $\pi_W(v)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\langle v,w_i\rangle}{\langle w_i,w_i\rangle}w_i$.

$$\pi_U(v)=\frac{\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\langle\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\right\rangle}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}+\frac{\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\frac{5}{6}\\\frac{11}{6}\\\frac{4}{3}\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\langle\begin{pmatrix}-\frac{5}{6}\\\frac{11}{6}\\\frac{4}{3}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\frac{5}{6}\\\frac{11}{6}\\\frac{4}{3}\end{pmatrix}\right\rangle}\begin{pmatrix}-\frac{5}{6}\\\frac{11}{6}\\\frac{4}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{7}\\\frac{26}{35}\\\frac{178}{35}\end{pmatrix}$$

כפי שיצא לנו מקודם.