בס"ד

תרגול מס' 1 בחשבון אינפי' 2

חקירת פונקציות.

הערה: אם $f\left(x\right)$ גזירה פעמיים ב- x_0, אזי x_0 היא נקודת פיתול אם"ם $f''\left(x\right)$ <u>מחליפה סימן</u> ב- x_0.

לפיכך הנקודות **החשודות לפיתול** (בדומה לנקודות החשודות לקיצון) תהיינה הנקודות בהן הנגזרת השנייה מתאפסת **או לא קיימת**. $f''\left(x_0\right)=0$ לבד לא מבטיח פיתול, למשל $f\left(x\right)=x^4$ בראשית.

לעומת זאת אם $f\left(x\right)$ גזירה שלוש פעמים ברציפות, ומתקיים: $f''\left(x_0\right)=0$ וגם $f'''\left(x_0\right)\neq 0$ אז x_0 היא נקודת פיתול: עפ"י טיילור $f\left(x\right)-h\left(x\right)=\frac{f'''\left(c\right)}{3!}\left(x-x_0\right)^3$ באשר $h\left(x\right)$ היא המשיק לפונקציה ב- x_0. אכן, נניח בה"כ כי: $f'''\left(x_0\right)>0$ אז בסביבה מספיק קטנה עדיין $f'''\left(x\right)>0$ ולכן גם $f'''\left(c\right)>0$ כלומר משמאל ל- x_0 המשיק נמצא מתחת לפונקציה ומשמאל ל- x_0 הוא נמצא מעליה.

באופן יותר כללי: תהא f פונקציה גזירה $n+2$ פעמים בסביבה של הנקודה x_0 כך שלכל $1\leq k\leq n$ מתקיים: $f^{(k)}\left(x_0\right)=0$ אבל: $f^{(n+1)}\left(x_0\right)\neq 0$. אם $n+1$ הוא זוגי אזי x_0 היא נקודת קיצון מקומי, אחרת x_0 היא נקודת פיתול.

הוכחה: תנאי משפט טיילור מסדר $n+1$ מתקיימים בסביבה כלשהי של x_0. כמו כן כל הנגזרות עד לנגזרת ה- n (למעט הפונקציה עצמה) מתאפסות ב- x_0 ולכן נוכל לרשום:

$f\left(x\right)-f\left(x_0\right)=R_n\left(x\right)=\frac{f^{(n+1)}\left(c\right)}{\left(n+1\right)!}\left(x-x_0\right)^{n+1}$ עבור נקודה c כלשהי בין x ל- x_0. נניח בה"כ כי: $f^{(n+1)}\left(x_0\right)>0$. $f^{(n+1)}$ גזירה ולכן רציפה ב- x_0. מכאן שקיימת סביבה U בה לכל x מתקיים: $f^{(n+1)}\left(x\right)>0$. הנקודה c נמצאת אף היא ב- U ולכן גם: $f^{(n+1)}\left(c\right)>0$. כעת אם $n+1$ זוגי, אז נקבל: $\forall x\in U: f\left(x\right)-f\left(x_0\right)\geq 0$ כלומר x_0 נקודת קיצון מקומי.

פונקצית המשיק ב- x_0 היא: $y=f\left(x_0\right)$. לכן אם $n+1$ אי-זוגי, אז משמאל ל- x_0 הפונקציה היא מתחת למשיק ומימין ל- x_0 הפונקציה היא מעל למשיק. כלומר x_0 נקודת פיתול. □

הערה: נקודת פיתול לא מחייבת את הנגזרת הראשונה להתאפס, למשל: $x + x^3$ בראשית.

אסימפטוטות

הגדרה: קו ישר $y = ax + b$ נקרא ***אסימפטוטה משופעת*** לפונקציה $f(x)$ אם מתקיים:

$\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-(ax+b)\right)=0$ או: $\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-(ax+b)\right)=0$.

אם כן: $\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{f(x)}{x}-a\right)=0 = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{f(x)}{x}-a-\frac{b}{x}\right)$ לכן נחשב את הקבועים a,b כך:

$b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-ax\right)$, $a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ וכן לגבי: $x\to-\infty$.

הגדרה: קו ישר מהצורה $x = x_0$ יקרא ***אסימפטוטה אנכית*** אם: $\lim_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty$.

דוגמה: לפונקציה $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$ יש אסימפטוטה אנכית $x=1$. נחשב את המשופעות:

$b=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x-1}=1$, $a=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x-1}=1$ כלומר האסימפטוטה המשופעת היא: $y=x+1$.

שלבים בחקירת פונקציה:

1. מציאת תחום הגדרה.
2. קביעת זוגיות / אי-זוגיות.
3. מציאת נקודות קיצון ותחומי עליה / ירידה (היכן הנגזרת הראשונה מחליפה סימן?)
4. קביעת נקודות פיתול ותחומי קעירות / קמירות (היכן הנגזרת השנייה מחליפה סימן?)
5. חישוב אסימפטוטות (מאונכות ומשופעות).
6. התנהגות הפונקציה ב- $\pm\infty$.
7. ציור של גרף הפונקציה.

תרגיל: חקור את הפונקציה: $f(x)=\frac{x^3}{12-x^2}$.

פתרון: 1. תחום הגדרה: $x\neq\pm\sqrt{12}$.

2. $f(-x)=\frac{-x^3}{12-x^2}=-f(x)$ כלומר הפונקציה היא אי-זוגית.

3. נגזור ונקבל: $f'(x)=\frac{x^2\left(36-x^2\right)}{\left(12-x^2\right)^2}$ כלומר הנקודות החשודות הן: $\left\{0\ ,\ \pm 6\ ,\ \pm\sqrt{12}\right\}$.

נבדוק את התנהגות הנגזרת בנקודות אלו:

$$-6<x<6 \Rightarrow \frac{x^2\left(36-x^2\right)}{\left(12-x^2\right)^2}>0 \quad , \quad x<-6\ ,\ x>6 \Rightarrow \frac{x^2\left(36-x^2\right)}{\left(12-x^2\right)^2}<0$$

קיבלנו שהנגזרת מחליפה סימן משלילי לחיובי בנקודה $x_1=-6$ ומחיובי לשלילי בנקודה $x_2=6$.

מכאן שהפונקציה יורדת בקטעים: $(6,\infty)$, $(-\infty,-6)$ ועולה בקטע: $(-6,6)$,

והנקודות ± 6 הן נקודות קיצון מקומיות (בשאר הנקודות הנגזרת לא מחליפה סימן): $x_1=-6$ נקודת מינימום מקומי ו- $x_2=6$ נקודת מקסימום מקומי.

4. $f''(x)=\frac{x\left(72-4x^2\right)\left(12-x^2\right)+4x^3\left(36-x^2\right)}{\left(12-x^2\right)^3}$ מחליפה סימן באפס לכן $x=0$ היא נק' פיתול.

5. אסימפטוטות מאונכות. נבדוק את התנהגות הפונקציה בנקודות שבהם הפונקציה שואפת ל- $\pm\infty$:

$$\lim_{x\to\sqrt{12}^-} f(x)=\infty \quad , \quad \lim_{x\to\sqrt{12}^+} f(x)=-\infty$$
$$\lim_{x\to-\sqrt{12}^+} f(x)=-\infty \quad , \quad \lim_{x\to-\sqrt{12}^-} f(x)=\infty$$

כלומר יש לנו שתי אסימפטוטות מאונכות: $x=-\sqrt{12}$, $x=\sqrt{12}$.

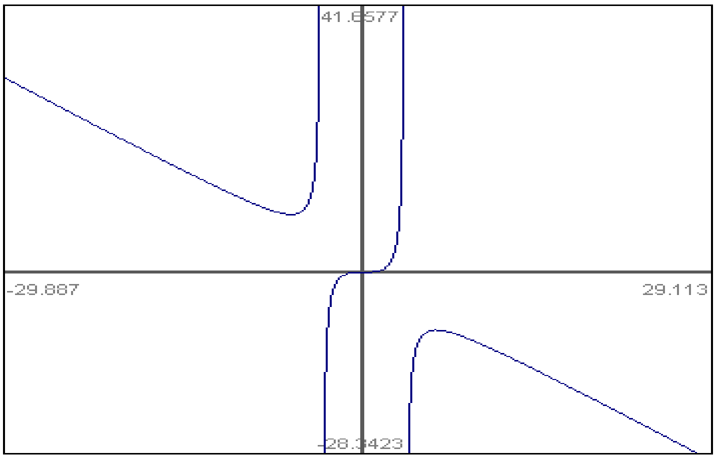
אסימפטוטות משופעות. א"מ ב- ∞ היא ישר $y=ax+b$ באשר:

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{12-x^2}=-1$$
$$b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-ax\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{12-x^2}+x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+12x-x^3}{12-x^2}=0$$

כלומר: $y=-x$. א"מ ב- $-\infty$ מחושבת באופן דומה כאשר $x\to-\infty$. גם כאן נקבל: $y=-x$.

6. התנהגות הפונקציה ב $\pm\infty$: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{12-x^2} = \infty$.

7. גרף הפונקציה:



תרגיל: תהיינה g ו- f פונקציות גזירות פעמיים ברציפות בנקודה x_0 ובנקודה $g(x_0)$ בהתאמה, כך ש: $g'(x_0), g''(x_0), f'(g(x_0)), f''(g(x_0)) > 0$. הוכח כי הפונקציה המורכבת $h = f \circ g$ עולה בסביבה של x_0 וקמורה כלפי מעלה ב-x_0 .

פתרון:

כיוון שהנגזרת הראשונה והשנייה של f, g רציפות וחיוביות, קיימת סביבה של x_0 בה עדיין מתקיים: $f'(y), g'(x), f''(y), g''(x) > 0$. עפ"י כלל השרשרת: $h'(x) = (f \circ g)'(x) = \underbrace{f'(y)}_{>0} \cdot \underbrace{g'(x)}_{>0} > 0$

כלומר $h(x)$ עולה ממש שם (משפט). כמו כן ע"י גזירה של מכפלת פונקציות נקבל:

$$h''(x) = (f'(y) \cdot g'(x))' = \underbrace{f''(y)}_{>0} \cdot \underbrace{g'(x)}_{>0} \cdot \underbrace{g'(x)}_{>0} + \underbrace{f'(y)}_{>0} \cdot \underbrace{g''(x)}_{>0} > 0$$

ומכאן עפ"י משפט שנלמד בכיתה $h(x)$ קמורה כלפי מעלה ב-x_0 .