תרגול 9- תת מרחב שמור

הגדרה. תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית, תת מרחב W של V נקרא אינווריאנטי (שמור) אם $T\left(W\right)\subseteq W$ או במילים אחרות

$$\forall w\in W:\ T\left(w\right)\in W$$

שימו לב כי אם W T אינוואריאנטי ניתן להתסכל על ה"ל המצומצמת

$$T_{|W}:W\to W$$

תרגיל: נגדיר $T:\mathbb{R}^{3}\to\mathbb{R}^{3}$ ע"י

דוגמה.

$$T\left(\begin{array}{c} x\\ y\\ z \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} x\\ x-y\\ 0 \end{array}\right)$$

האם תתי המרחבים הבאים אינווריאנטים?

1. $W_{1}=Span\left\{ \left(\begin{array}{c} 1\\ 0\\ 0 \end{array}\right),\left(\begin{array}{c} 0\\ 1\\ 0 \end{array}\right)\right\}$
2. $W_{2}=Span\left\{ \left(\begin{array}{c} 0\\ 0\\ 1 \end{array}\right)\right\}$
3. $W_{3}=Span\left\{ \left(\begin{array}{c} 1\\ 0\\ 0 \end{array}\right)\right\}$

פתרון:

1. נפעיל את העתקה על W_{1} ונקבל

$$T\left(W_{1}\right)=Span\left\{ T\left(\begin{array}{c} 1\\ 0\\ 0 \end{array}\right),T\left(\begin{array}{c} 0\\ 1\\ 0 \end{array}\right)\right\} =Span\left\{ \left(\begin{array}{c} 1\\ 1\\ 0 \end{array}\right),\left(\begin{array}{c} 0\\ -1\\ 0 \end{array}\right)\right\} =Span\left\{ \left(\begin{array}{c} 1\\ 0\\ 0 \end{array}\right),\left(\begin{array}{c} 0\\ 1\\ 0 \end{array}\right)\right\} \subseteq W_{1}$$

לכן W_{1} הוא תת מרחב אינווריאנטי של $\mathbb{R}^{3}$ תחת T

2. נפעיל את העתקה על W_{2} ונקבל

$$T\left(W_{2}\right)=Span\left\{ T\left(\begin{array}{c} 0\\ 0\\ 1 \end{array}\right)\right\} =Span\left\{ 0\right\} =\left\{ \overrightarrow{0}\right\} \subseteq W_{2}$$

לכן W_{2} הוא תת מרחב אינווריאנטי של $\mathbb{R}^{3}$ תחת T

3. נפעיל את העתקה על W_3 ונקבל

$$T\left(W_3\right)=Span\left\{T\left(\begin{array}{c}1\\0\\0\end{array}\right)\right\}=Span\left\{\left(\begin{array}{c}1\\1\\0\end{array}\right)\right\}\nsubseteq W_3$$

לכן W_3 הוא **לא** תת מרחב אינווריאנטי של $\mathbb{R}^3$ תחת T

משפט. (משפט הפירוק הפרימרי):

תהא $T:V\to V$ ה"ל ויהא $m_T=\prod_i p_i^{r_i}$ כאשר p_i הגורמים האי פריקים. נגדיר $W_i=\ker\left(p_i^{r_i}(T)\right)$. אזי

1. לכל i התמ"מ W_i הוא T- אינוואריאנטי
2. מתקיים כי $V=\oplus_i W_i$
3. אם B_i בסיס ל W_i ו $B=\cup_i B_i$ אזי $[T]_B^B=\oplus_i[T_{|W_i}]_{B_i}$

תרגיל. תהיה העתקה לינארית $T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ המוגדרת על ידי $T\left(\begin{array}{c}x\\y\\z\\w\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}2x\\x+y\\2z\\3w\end{array}\right)$

הצג את $\mathbb{R}^4$כסכום ישר של תתי מרחבים אינוו ביחס ל-T.

פתרון. ראשית נמצא את המטריצה המייצגת לפי הבסיס הסטנדרטי שהיא

$$[T]_S^S=\left(\begin{array}{cccc}2&0&0&0\\1&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\end{array}\right)$$

אחרי חישוב נקבל שהפולינום המינימלי הוא

$$m_T\left(x\right)=\left(x-2\right)\left(x-1\right)\left(x-3\right)$$

כלומר לפי המשפט הפירוק פרימרי מתקיים

$$\mathbb{R}^4=\mathrm{Ker}\left(T-2I\right)\oplus\mathrm{Ker}\left(T-I\right)\oplus\mathrm{Ker}\left(T-3I\right)$$

נמצא את תתי המרחבים הללו

$$\mathrm{Ker}\left(T-2I\right)=N\left([T-2I]_S^S\right)=N\left(\begin{array}{cccc}0&0&0&0\\1&-1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{array}\right)=Span\left\{\left(\begin{array}{c}0\\0\\1\\0\end{array}\right),\left(\begin{array}{c}1\\1\\0\\0\end{array}\right)\right\}$$

$$\mathrm{Ker}\left(T-I\right)=N\left([T-I]_S^S\right)=N\left(\begin{array}{cccc}1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&2\end{array}\right)=Span\left\{\left(\begin{array}{c}0\\1\\0\\0\end{array}\right)\right\}$$

ו-

$$\mathrm{Ker}\left(T-3I\right)=N\left([T-3I]_S^S\right)=N\left(\begin{array}{cccc}-1&0&0&0\\1&-2&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)=Span\left\{\left(\begin{array}{c}0\\0\\0\\1\end{array}\right)\right\}$$

לכן

$$\mathbb{R}^4 = Span\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}\oplus Span\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}\oplus Span\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

סעיף 3 במשפט אומר את הדבר הבא:

אם $B' = \left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ אז

$$[T]_{B'}^{B'} =$$

$$\begin{pmatrix} | & | & | & | \\ \left[T\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right]_{B'} & \left[T\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right]_{B'} & \left[T\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right]_{B'} & \left[T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right]_{B'} \\ | & | & | & | \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} | & | & | & | \\ \left[\begin{pmatrix}0\\0\\2\\0\end{pmatrix}\right]_{B'} & \left[\begin{pmatrix}2\\2\\0\\0\end{pmatrix}\right]_{B'} & \left[\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right]_{B'} & \left[\begin{pmatrix}0\\0\\0\\3\end{pmatrix}\right]_{B'} \\ | & | & | & | \end{pmatrix} =$$

$$\left(\begin{array}{cc|c|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$