בוחן 1 - פתרון

1. בדוק לאילו ערכי k למערכת הבאה קיים פתרון יחיד/אין פתרון/אינסוף פתרונות:

$$\begin{cases} kx_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + kx_2 + x_3 + x_4 = k \\ x_1 + x_2 + kx_3 + x_4 = k+1 \end{cases}$$

פתרון:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} k & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & k & 1 & k+1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \leftrightarrow L_1]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & k & 1 & k+1 \\ 1 & k & 1 & 1 & k \\ k & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{L_2 \to L_2 - L_1 \\ L_3 \to L_3 - kL_1}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & k & 1 & k+1 \\ 0 & k-1 & 1-k & 0 & -1 \\ 0 & 1-k & 1-k^2 & 1-k & 1-k-k^2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_3 \to L_3 + L_2]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & k & 1 & k+1 \\ 0 & k-1 & 1-k & 0 & -1 \\ 0 & 0 & (2+k)(1-k) & 1-k & -k(k+1) \end{array}\right)$$

<u>**מקרה 1**</u> $\boxed{k=1}$ $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$ $\Leftarrow$ <u>**אין פתרון**</u>

<u>**מקרה 2**</u> $\boxed{k=-2}$ $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2 \end{array}\right)$ $\Leftarrow$ <u>**אינסוף פתרונות**</u>

<u>**מקרה 3**</u> $\boxed{k \neq 1,-2}$ $\Leftarrow$ <u>**אינסוף פתרונות**</u>

2. יהי $z \neq 0$ מספר מרוכב הוכיחו כי $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \frac{|z|^2}{z})$.

(תזכורת: $\operatorname{Re} z$ הוא החלק הממשי של z , $|z|$ הוא הערך המוחלט של z).

פתרון:

נסמן: $z = x + iy$, מכאן $|z|^2 = x^2 + y^2$

$$\frac{1}{2}\left(z+\frac{|z|^2}{z}\right)=\frac{1}{2}\left(x+iy+\frac{\left(x^2+y^2\right)\left(x-iy\right)}{\left(x+iy\right)\left(x-iy\right)}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(x+iy+\frac{\left(x^2+y^2\right)\left(x-iy\right)}{\left(x^2+y^2\right)}\right)=\frac{1}{2}\left(x+iy+\left(x-iy\right)\right)=x=\operatorname{Re}z$$

<u>דרך קצרה יותר</u>: נשתמש בכך ש $|z|^2=z\cdot\bar{z}$ ובכך ש $z+\bar{z}=2\operatorname{Re}z$ ונקבל

$$\frac{1}{2}\left(z+\frac{|z|^2}{z}\right)=\frac{1}{2}\left(z+\frac{z\cdot\bar{z}}{z}\right)=\frac{1}{2}\left(z+\bar{z}\right)=\frac{1}{2}\cdot 2\operatorname{Re}z=\operatorname{Re}z$$

3. נתונה: $A=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}$.

(i) חשבו את A^{-1} .

(ii) האם קיימת מטריצה X כך ש $AX=A-I$? אם כן, חשבו אותה.

פתרון:

(i)

$$\left[\begin{array}{cccccc}1&0&-1&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\1&0&1&0&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccccc}1&0&-1&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\0&0&2&-1&0&1\end{array}\right]\underset{\substack{R_2\to 2R_2-R_3\\R_1\to 2R_1+R_3}}{\to}\left[\begin{array}{cccccc}2&0&0&1&0&1\\0&2&0&1&2&-1\\0&0&2&-1&0&1\end{array}\right]\to$$

$$\left[\begin{array}{cccccc}1&0&0&1/2&0&1/2\\0&1&0&1/2&1&-1/2\\0&0&1&-1/2&0&1/2\end{array}\right]$$

לכן $A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0&1\\1&2&-1\\-1&0&1\end{bmatrix}$

(ii) $AX=A-I \Leftrightarrow A-AX=I \Leftrightarrow A(I-X)=I \Leftrightarrow I-X=A^{-1} \Leftrightarrow X=I-A^{-1}$

ומכאן נקבל
$$X = I - A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. קבע נכון/לא נכון ונמק:

א. קיימת מערכת ליניארית של שתי משוואות וארבעה נעלמים כך שאוסף הפתרונות שלה הוא
$$S = \{[2a\text{-}4,\ 4\text{-}7a,\ 8,\ a]^t \ \ | \ a \in \mathbb{R}\}$$

ב. לכל $A,\ B \in M_{2\times 2}(R)$ **מתקיים** $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.

ג. קיימות $A,\ B \in M_{2\times 2}(R)$ **שעבורן מתקיים** $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.

פתרון:

א. לא, כי לאוסף הפתרונות של מערכת ליניארית של שתי משוואות וארבעה נעלמים (אם הוא לא ריק) יש לפחות שני משתנים חופשיים.

ב. לא, יתקיים שיוויון אם ניקח מטריצות המתחלפות בניהם למשל $A = B = I$.

ג. כן, לדוגמה אם ניקח מטריצות שאינן מתחלפות בניהם למשל $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$