מבחן סיום בקורס מבוא לאלגברה לינארית 89־119
מועד א' סמסטר א' תשע"ז

<u>מרצה</u>: איתמר שטיין
<u>מתרגלת</u>: אלכסנדרה סימנובסקי.
<u>תאריך</u>: ד' אדר תשע"ז 2/3/17.
<u>משך המבחן</u>: שלוש שעות.
<u>הוראות</u>: יש לענות על 4 מתוך 5 שאלות. אם עניתם על 5 שאלות, יש לסמן באופן ברור 4 שאלות שאתם רוצים שתבדקנה. אחרת 4 השאלות הראשונות תבדקנה.
כל שאלה שווה 25 נקודות.
<u>חומר עזר מותר בשימוש</u>: מחשבון מדעי פשוט בלבד.
יש לנמק היטב את תשובותיכם!

1. נתונה מערכת משוואות לינאריות התלויה בפרמטר k.

$$\begin{aligned} x+2y+(-k-1)z&=0\\ 3x+(6+2k)y-3z&=0\\ (2+k)x+4y-2z&=0 \end{aligned}$$

עבור אליו ערכי k למערכת:

(א) אין פתרון?
(ב) יש פתרון יחיד? במקרים אלו מצאו את הפתרון.
(ג) אינסוף פתרונות? במקרים אלו מצאו את הפתרון הכללי.

פתרון: כרגיל, נכניס את הנתונים למטריצה ונדרג

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -k-1 & 0\\ 3 & 6+2k & -3 & 0\\ 2+k & 4 & -2 & 0 \end{array}\right) \xmapsto{R_2=R_2-3R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -k-1 & 0\\ 0 & 2k & 3k & 0\\ 2+k & 4 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xmapsto{R_3=R_3-(2+k)R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -k-1 & 0\\ 0 & 2k & 3k & 0\\ 0 & -2k & -2-(2+k)(-k-1) & 0 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -k-1 & 0\\ 0 & 2k & 3k & 0\\ 0 & -2k & k^2+3k & 0 \end{array}\right) \xmapsto{R_3=R_3+R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -k-1 & 0\\ 0 & 2k & 3k & 0\\ 0 & 0 & k^2+6k & 0 \end{array}\right)$$

למערכת אין פתרון רק כאשר יש שורת סתירה. אבל כאן כל העמודה הימנית היא אפסים ולכן אין ערך k עבורו למערכת אין פתרון (כמובן, את זה יכולנו להגיד מיד בהתחלה עוד לפני שהתחלנו לדרג) עכשיו אנחנו רוצים לראות עבור אילו ערכי k יש משתנים חופשיים. כדי שיהיה פתרון יחיד, צריך שלא יהיו משתנים חופשיים בכלל. כלומר במקרה שלנו צריך שכל האיברים על האלכסון יהיו שונים מ0כלומר צריך

$$2k \neq 0$$
$$k^2 + 6k \neq 0$$

שזה בעצם אומר

$$k \neq 0, -6$$

כלומר עבור כל ערך k חוץ מ 0 ו -6 יש בכל עמודה איבר מוביל ולכן יש פתרון יחיד. היות שהמערכת הומוגנית פתרון זה הוא כמובן

$$x = y = z = 0$$

עכשיו נותר לטפל בשני המקרים האחרונים. אם $k = 0$ אז מתקבל

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

כלומר יש שני משתנים חופשיים. נסמן $z = t$ ו $y = s$ ואז

$$x = -2s + t$$

כלומר הפתרון הכללי הוא

$$(-2s + t, s, t)$$

אם $k = -6$ אז המערכת המתקבלת היא:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & -12 & -18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

יש משתנה חופשי אחד. נסמן $z = t$ ונקבל

$$-12y - 18t = 0$$

כלומר

$$y = -\frac{3}{2}t$$

ומהשורה הראשונה

$$x = -2y - 5z = +3t - 5t = -2t$$

ולכן הפתרון הכללי הוא:

$$(-2t, -\frac{3}{2}t, t)$$

וזהו.

2. נתונה המטריצה ההפיכה הבאה:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

(א) מצאו את A^{-1}.

פתרון: נשתמש באלגוריתם הרגיל למציאת מטריצה הופכית

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xmapsto{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xmapsto{R_3 = R_3 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xmapsto{R_1 = R_1 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \xmapsto{R_2 = \frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

ולכן

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(ב) כתבו את A כמכפלה של מטריצות אלמנטריות.

פתרון: נזכור שביצוע פעולת שורה מקביל לכפל משמאל במטריצה אלמנטרית מתאימה. לכן החישוב שעשינו בסעיף הקודם אומר בעצם ש

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A = I$$

ולכן

$$\begin{aligned} A &= (\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix})^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

וזהו.

3. נתונה מטריצה:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\-1&-1&-2\\2&3&1\end{pmatrix}$$

(א) חשבו את הדרגה של A.

פתרון: נדרג את A:

$$\begin{pmatrix}1&2&-1\\-1&-1&-2\\2&3&1\end{pmatrix}\overset{R_2=R_2+R_1}{\longmapsto}\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&-3\\2&3&1\end{pmatrix}\overset{R_3=R_3-2R_1}{\longmapsto}\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&-3\\0&-1&3\end{pmatrix}$$
$$\overset{R_3=R_3+R_2}{\longmapsto}\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&-3\\0&0&0\end{pmatrix}$$

הגענו לצורה מדורגת. יש בה 2 שורות שהן אינן שורות אפסים ולכן

$$\operatorname{rank}A=2$$

(ב) האם עמודות A פורשות את המרחב $\mathbb{R}^3$? נמקו.

פתרון: לא. נניח בשלילה שעמודות A פורשות את $\mathbb{R}^3$ אז מרחב העמודות של A הוא כל $\mathbb{R}^3$ כלומר:

$$C(A)=\mathbb{R}^3$$

ולכן

$$\dim C(A)=\dim\mathbb{R}^3=3$$

אבל

$$\dim C(A)=\operatorname{rank}A=2$$

כפי שחישבנו בסעיף הקודם וזו סתירה.
לכן עמודות A לא פורשות את $\mathbb{R}^3$.

4. (א) חשבו את הדטרמיננטה של

$$B=\begin{pmatrix}1&1&7\\1&3&0\\1&3&1\end{pmatrix}$$

פתרון: נבצע פיתוח לפי מינורים. נגיד נפתח לפי עמודה ראשונה:

$$\left|\begin{pmatrix}1&1&7\\1&3&0\\1&3&1\end{pmatrix}\right|=1\left|\begin{pmatrix}3&0\\3&1\end{pmatrix}\right|-1\left|\begin{pmatrix}1&7\\3&1\end{pmatrix}\right|+1\left|\begin{pmatrix}1&7\\3&0\end{pmatrix}\right|=3-(1-21)-21=2$$

(ב) תהי $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ מטריצה. ביצענו על A את פעולות השורה הבאות:

- $R_1 = R_1 + 1077R_3$
- $R_2 = \frac{1}{3}R_2$
- $R_3 \leftrightarrow R_1$
- $R_3 = R_3 - \frac{89}{5}R_2$

וקיבלנו את המטריצה B מסעיף א'. מהי הדטרמיננטה של A? נמקו.
פתרון: נזכור שפעולה של הפחתת שורה אחת מאחרת לא משנה דטרמיננטה ולכן הפעולה הראשונה והאחרונה לא משנות את הדטרימננטה. הפעולה השניה חילקה אותה ב 3 והפעולה השלישית שינתה סימן ולכן

$$|A| = -3|B| = -6$$

(ג) האם השורות של A הן בת"ל? נמקו.
פתרון: כן. הרגע ראינו שהדטרמיננטה של A אינה 0 ולכן A הפיכה. לכן השורות של A מהוות בסיס ובפרט הן בלתי תלויות לינארית.

5. נתונה מטריצה

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$$

(א) מצאו את הערכים העצמיים של A.
פתרון: נחשב פולינום אפייני

$$|A - \lambda I| = \left|\begin{pmatrix} -2-\lambda & -2 \\ 6 & 5-\lambda \end{pmatrix}\right| = (-2-\lambda)(5-\lambda) + 12 = \lambda^2 - 3\lambda - 10 + 12$$
$$= \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$$

כלומר הערכים העצמיים שהם השורשים של הפולינום האופייני הם:

$$\lambda = 1, 2$$

(ב) מצאו בסיסים עבור המרחבים העצמיים של A והסבירו מדוע A לכסינה.
פתרון: עבור $\lambda = 1$ נקבל

$$A - I = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

צורה מדורגת תהיה

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן כדי למצוא פתרון כללי נסמן

$$y = t$$

$$-3x - 2t = 0$$

$$x = -\frac{2}{3}t$$

כלומר פתרון כללי יהיה

$$(-\frac{2}{3}t, t)$$

אז בסיס למרחב העצמי יהיה

$$\{\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}\}$$

עבור הערך העצמי $\lambda = 2$ נקבל ש

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

כדי למצוא פתרון כללי נסמן $y = t$ ונקבל

$$-4x - 2t = 0$$

$$x = -\frac{1}{2}t$$

כלומר פתרון כללי הוא

$$(-\frac{1}{2}t, t)$$

ולכן בסיס למרחב העצמי יהיה

$$\{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}\}$$

נותר להסביר מדוע A לכסינה. ראשית הפולינום האופייני הוא $(\lambda - 2)(\lambda - 1)$ כלומר הוא מתפרק לגורמים לינאריים. בנוסף, הריבוי האלגברי של כל ערך עצמי הוא 1. כמו כן, הרגע ראינו שכל בסיס למרחב עצמי מכיל וקטור אחד. כלומר המימד של כל מרחב עצמי הוא 1. לכן, עבור כל ערך עצמי, המימד של המרחב העצמי שווה לריבוי האלגברי ולכן לפי משפט המטריצה לכסינה.

(ג) חשבו את A^k כאשר k הוא מספר טבעי.
פתרון: היות שהערכים העצמיים הם $1,2$ נקבל שהמטריצה האלכסונית היא

$$D=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

המטריצה המלכסנת היא מטריצה שבעמודות שלה נמצאים בסיסים למרחבים העצמיים. לכן

$$P=\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

לכן

$$P^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

כלומר במקרה $P=P^{-1}$. כעת,

$$P^{-1}AP=D$$

ולכן

$$A=PDP^{-1}$$

לכן

$$\begin{aligned} A^k &= (PDP^{-1})^k = PD^kP^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -2 & -2^k \\ 3 & 2^{k+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4-3\cdot 2^k & 2-2^{k+1} \\ -6+3\cdot 2^{k+1} & -3+2^{k+2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

וזהו.