פתרון תרגיל בית 4 – מופשטת 1, קיץ 2011

שאלה 1

א) כמה חבורות אבליות מסדר 500 (עד כדי איזומורפיזם) יש?

$500 = 2^2 \cdot 5^3 \ ; \ \rho(2)\rho(3) = 2\cdot 3 = 6$

ב) בכמה מהן יש איבר מסדר 4?

ב-3 מהן (כאשר מופיע בפירוק $\mathbb{Z}_4$).

ג) בכמה מהן יש איבר מסדר 20?

ב-3 מהן.

ד. $3600 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2$, לכן יש $\rho(4)\rho(2)\rho(2) = 5\cdot 2\cdot 2 = 20$ חבורות אבליות מסדר 3600 עד כדי איזומורפיזם. ת"ח 5-סילו (כלומר מסדר 25) תהיה ציקלית אמ"מ מופיע הגורם $\mathbb{Z}_{25}$ ולא $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$. יש $\rho(4)\rho(2) = 5\cdot 2 = 10$ כאלו עד כדי איזומורפיזם.

שאלה 2

א) **נניח ש- G היא חבורת p, וש- G פועלת על קבוצה עם n איברים כש- p לא מחלק את n. הוכיחו שקיימת נקודת שבת.**

נתון $|G| = p^k, |X| = n$ ו- p לא מחלק את n

אם $\{x_1,\ldots,x_n\}$ הם המייצגים של המסלולים אז:

$n = \sum_{i=1}^{t} |G * x_i| = \sum_{i=1}^{t} |orb(x_i)| = \sum_{i=1}^{t} \frac{|G|}{|stb(x_i)|}$. כלומר n הוא סכום אורכי המסלולים, המחלקים את $|G|$.

המס' הטבעיים שיכולים לעשות זאת הם : $\{1, p, p^2, \ldots, p^k\}$. כלומר, כל מסלול הוא באורך אפשרי p^i $(0 \le i \le t)$ ו- n הוא סכום האורכים. לפיכך n הוא מהצורה:

$n = a_0 + a_1 p + \ldots + a_t p^t$

כיוון ש p לא מחלק את n אז בהכרח $a_0 > 0$; כלומר יש לפחות מסלול אחד באורך 1, משמע – יש נקודת שבת.

ב) **הוכיחו או הפריכו: בהינתן חבורה G הפועלת על קבוצה X כך ש- $|G| = |X| = 13$, בהכרח קיימת לפעולה נקודת שבת.**

<u>הפרכה</u>: למשל G פועלת על עצמה על ידי כפל משמאל. לפעולה זו לא קיימות נקודות שבת (מדוע?)

ג) **מצא כמה לוחות 3×3 לא שקולים קיימים (עד כדי סימטריות של הריבוע) אם מותר לצבוע ב-2 צבעים.**

נגדיר את מרחב הפעולה ככל הצביעות האפשריות של הלוח:
$X=\{f:\{1,2,3,...,9\}\to\{0,1\}\}$, ונפעל עליו עם החבורה הדיהדרלית D_4. נחשב את כל הגדלים הדרושים:

סה"כ	$\|X_g\|$	$g\in D_4$
2^9	2^9	id
$2\cdot 2^3$	2^3	σ,σ^3
2^5	2^5	σ^2
$4\cdot 2^6$	2^6	$\tau,\sigma\tau,\sigma^2\tau,\sigma^3\tau$

לבסוף נקבל על פי משפט ברנסייד כי מספר המסלולים הינו 102.

<u>שאלה 3</u>

א) כמה מחלקות צמידות יש בחבורה S_6?

כפי שראינו מחלקות הצמידות ב- S_n הן קבוצות המכילות את כל התמורות בעלות אותו מבנה מחזורים. לכן מספיק לספור כמה מבני מחזורים יש, כלומר לחשב את $\rho(6)=11$.

ב) הוכיחו או הפריכו: קיימת תת-חבורה מסדר 34 בחבורה S_{15}.

אין תת חבורה כזאת, כי 34 אינו מחלק את הסדר של החבורה.

ג) תהא $G=S_4$ הפועלת על הקבוצה $X=\{1,2,3,4\}$ ע"י $g*x=g(x)$. חשבו את המייצב של $x=2$. האם המייצב של $x=2$ הוא ת"ח נורמלית של G? נמקו.

המייצב של $x=2$ הוא התמורות שלא מזיזות את 2, כלומר:
$A=\{id,(13),(14),(34),(134),(143)\}$. המייצב אינו תת חבורה נורמלית שכן, למשל, $(12)(13)(12)=(23)\notin A$

<u>שאלה 4</u>

א) תהא G חבורה עם: 20, 45,52, 99 או 175 איברים. הוכיחו ש G לא פשוטה.

אלה הן חבורות מסדר p^2q והראינו בכיתה שחבורות אלה אינן פשוטות.

ב) הוכיחו או הפריכו: קיימת חבורה לא פתירה עם 77 איברים.

לא נכון. $77=11\cdot 7$. לפי משפט סילוא 3, $n_{11}=1$ ולכן H_{11} היא תת-חבורת 11-סילוא נורמלית. נשים לב כי $\left|G/H_{11}\right|=7$ ולכן המנה היא אבלית. משמע, קיבלנו את סדרת ההרכב: $G\rhd H_{11}\rhd\{e\}$. המנות אבליות ולכן החבורה פתירה.

ג) תהא G חבורה מסדר 143. זהו את כל תתי-החבורות שלה (עד כדי איזומורפיזם).

143=13*11. לכן התת-חבורות (הלא טריוויאליות) הן מסדרים 13 ו-11. אלו הם מספרים ראשוניים ולכן התת-חבורות איזומורפיות ל- $\mathbb{Z}_{13}$ ול- $\mathbb{Z}_{11}$.

ד) הוכיחו או הפריכו: אין חבורה פשוטה מסדר 125.

$125=5^3$. זוהי חבורת p ולכן המרכז שלה אינו טריוויאלי. אבל המרכז הוא תת-חבורה נורמלית ולכן יש תת-חבורה נורמלית והחבורה אינה פשוטה.

ה) תהא G חבורה מסדר 1645 או 9797. הוכיחו ש G ציקלית.

9797=97*101 ולכן אם G חבורה מסדר 9797 אז ע"פ המשפט על חבורות מסדר pq, G ציקלית.

1645 = 5*7*47. ניתן לראות ש – $n_{47}=n_7=n_5=1$. שלושת תתי החבורות הללו הן ציקליות ונורמליות. נסמן: $H_{47}=\langle c\rangle$, $H_7=\langle b\rangle$, $H_5=\langle a\rangle$.

טענה: היוצרים של שלושת תתי החבורות הנ"ל מתחלפים בינהם.

הוכחת הטענה: נראה את זה עבור שני יוצרים (והשאר באותו אופן). מתקיים:

$aba^{-1}b^{-1}=\left(aba^{-1}\right)b^{-1}\in H_7$ כי H_7 נורמלית. $aba^{-1}b^{-1}=a\left(ba^{-1}b^{-1}\right)\in H_5$ כי H_5 נורמלית. לכן, משיקולים של סדרי החבורות, נקבל $aba^{-1}b^{-1}=1$, ז"א $ab=ba$. מש"ל.

כעת, יש לנו שלושה איברים בחבורה שמתחלפים בינהם וכן הסדרים שלהם זרים, אזי לפי טענה שראיתם בכיתה מתקיים: $|a\cdot b\cdot c|=lcm\left(|a|,|b|,|c|\right)=1645$ ולכן $\langle a\cdot b\cdot c\rangle=G$ והחבורה היא ציקלית.

ו) הוכיחו או הפריכו: כל חבורה מסדר 15,16,17 היא אבלית.

17- ראשוני ולכן כל חבורה מסדר זה היא ציקלית, ולכן אבלית.

16 – לא נכון. D_8 היא מסדר 16 אך היא לא אבלית.

15- מתקיים $15=3\cdot 5 \ \wedge \ 5\neq 1 \pmod 3$ ולכן החבורה ציקלית ולכן אבלית.

<u>שאלה 5</u>

תהא G חבורה. הוכיחו שלא קיימת תת חבורה p-סילוא H כך ש- $\left[G:N\left(H\right)\right]=2$.

נניח בשלילה שקיימת תת חבורה p-סילו H כך ש- $\left[G:N\left(H\right)\right]=2$. לפי משפט – $n_p=\left[G:N\left(H\right)\right]$ ולכן $n_p=2$. מצד שני – $n_p\equiv 1\left(\bmod p\right)$ ולכן קיים k **שלם** כך ש- $n_p=1+kp$, או $2=1+kp$. ז"א ש- $kp=1$ ומכיוון ש- p ראשוני ($p>1$) נקבל ש- k הוא שבר – סתירה!

<u>שאלה 6</u>

א. מהי הדרגה ($rank$) של $GL_2\left(\mathbb{Z}_2\right)$?

בחבורה הנתונה יש רק 6 איברים. לאחר שתכתבו את כולם תוכלו לראות כי $GL_2\left(\mathbb{Z}_2\right)\cong S_3$ (היות ו- $GL_2\left(\mathbb{Z}_2\right)$ לא אבלית, ויש רק שתי חבורות מסדר 6).

ולכן $rank\left(G\right)=2$. שני היוצרים הם (למשל) $\left\{\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}\right\}$.

ב. הוכיחו כי כל חבורה אבלית G עם $rank(G)=n$ היא תמונה אפימורפית של $\mathbb{Z}^m$ לכל $m\geq n$.

נניח $G=\left\langle a_1,...,a_n\right\rangle$ ונגדיר העתקה: $f:\left(\mathbb{Z}^m,+\right)\to\left(G,\cdot\right)$ על ידי: $\left(k_1,k_2,...,k_m\right)\mapsto a_1^{k_1}\cdot ...\cdot a_n^{k_n}$. מכיוון ש- G אבלית, ניתן לשנות את סדר המכפלה בתמונה כרצוננו ולקבל: $\forall\overline{x},\overline{y}\in\mathbb{Z}^m\ \ f\left(\overline{x}+\overline{y}\right)=f\left(\overline{x}\right)\cdot f\left(\overline{y}\right)$. כלומר f הוא הומומורפיזם. כיוון שניתן במקור להכניס כל חזקה שלמה, ומשום ש- $G=\left\{a_1^{k_1}\cdot ...\cdot a_n^{k_n}:k_i\in\mathbb{Z}\right\}$ נקבל ש- f על.

<u>שאלה 7</u>

מעל קבוצה $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ נגדיר פעולה $(a_1,b_1)\bullet(a_2,b_2)=(a_1+b_1a_2,b_1b_2)$. הוכיחו:

א) $G=(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*,\bullet)$ חבורה והיא לא אבלית.

ב) חשבו את G',G'' והראו ש- G פתירה.

א) סגירות: (ברור) $(a,b)(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*\qquad\forall(a,b),(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$

אסוציאטיביות:
$$((a,b)(x,y))(A,B)=(a+bx,by)(A,B)=(a+bx+byA,byB)=$$
$$(a,b)((x,y)(A,B))=(a,b)(x+yA,yB)=(a+b(x+yA),byB)$$

איבר נייטרלי: $(a,b)(x,y)=(a,b)=(a+bx,by)\Rightarrow y=1,x=0\Rightarrow e=(0,1)$

הופכי: $(a,b)(x,y)=(0,1)=(a+bx,by)\Rightarrow y=\frac{1}{b},x=-a/b\Rightarrow (a,b)^{-1}=(-a/b,1/b)$

החבורה לא אבלית: $(1,2)(3,5)=(7,10)\neq(8,10)=(3,5)(1,2)$

ב) מחישוב של $uvu^{-1}v^{-1}$ עבור כל u,v מהחבורה נקבל שכל איבר בנגזרת הראשונה הוא מהצורה $(x,1)$; ומחישוב של כל $uvu^{-1}v^{-1}$ עבור כל איבר מהנגזרת הראשונה נקבל $(x,1)(a,1)(-x,1)(-a,1)=(0,1)=e$ ולכן החבורה פתירה.

<u>שאלה 8</u>

תהא G חבורה מסדר 21 כך שיש בה יותר משני איברים מסדר 3. הראו כי G אינה אבלית אבל פתירה.

אם G אבלית אז כל ת"ח שלה היא נורמלית. אך נתון כי יש יותר משני איברים מסדר 3 כלומר יש יותר מחבורת 3-סילו אחת, ומתוך משפט סילו-2 ניתן להסיק כי הן לא נורמליות.

לעומת זאת מתוך משפט סילו 3 נובע במקרה שלנו כי יש רק חבורת 7-סילו אחת וזו אם כן נורמלית.

נסמנה ב- H_7 ונקבל את הסדרה הנורמלית: $G\rhd H_7\rhd\{e\}$. סדרי המנות בסדרה זו הם $3,7$ כלומר המנות הן ציקליות ולכן אבליות. אם כן זו סדרת הרכב והחבורה היא פתירה.

<u>שאלה 9</u>

הוכיחו או הפריכו: קיימת חבורה אינסופית G כך שלכל תת-קבוצה סופית $A=\{a_1,...,a_n\}\subset G$, תת-החבורה $<A>$ הנוצרת ע"י A היא סופית.

<u>הוכחה:</u> למשל בחבורה האינסופית $\mathbb{Z}_2^{\mathbb{N}}$ (עם חיבור מודולו 2 בכל רכיב), כל איבר הוא מסדר 2 לכל היותר, ולכן כל קבוצה סופית של איברים כאלו יוצרת בהכרח חבורה סופית.

דוגמא נוספת – אוסף כל שורשי היחידה Ω_∞.

<u>שאלה 10</u>

א. למשל D_3 (או D_n לכל n).

(נקח ת"ח : $H=C_3$. שרשרת הבאה היא נורמלית עם מנות אבליות : $G \triangleleft H \triangleleft \{e\}$: הסדר של $\frac{G}{H}$ הוא 2 ולכן H נורמלית והחבורת מנה אבלית. H ציקלית ולכן אבלית ואז גם המנה $\frac{H}{\{e\}}$ אבלית.)

ב. מקרה אינסופי:

$$G:=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}: \quad a\in\mathbb{R}^*, b\in\mathbb{R}\right\}$$ או $$D_3^{\mathbb{N}}=D_3\times D_3\times\ldots\ldots.$$

(נקח $H:=\left\{\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}: \quad b\in\mathbb{R}\right\}\triangleleft G$ אבלית כי איזומורפית ל $\mathbb{R}$ ושרשרת נורמלית $\{e\}\triangleleft H\triangleleft G$ חבורת מנה $G/H\cong\mathbb{R}^*$ גם אבלית. שימו לב שיש אפימורפיזם $G\to\mathbb{R}^*$ עם הגרעין H. דרך אחרת לבדוק: נגזרת ראשונה של G שווה ל H).

שאלה 11

א. לפי משפט לגרנז', הסדר של כל $g\in G$ הוא מהצורה p^{k_i} עבור $1\le k_i\le k$. לכן $\exp(G)=lcm(p^{k_i})=\max(p^{k_i})$. אם $\exp(G)=|G|$ אז $\max(p^{k_i})=|G|$ כלומר יש איבר מסדר p^{k_i} כלומר G ציקלית לכן אבלית, סתירה.

ב. נמצא את סדרי האיברים ב- S_3: id מסדר 1, כל חילוף הוא מסדר 2, וכל מחזור מאורך 3 הוא מסדר 3. סה"כ יש איברים מסדר 1,2,3, ו- $lcm(1,2,3)=6$ לכן האקספוננט של S_3 הוא 6. כעת נמצא את סדרי האיברים ב- S_5: id מסדר 1, כל מחזור מאורך k ($2\le k\le 5$) הוא מסדר k, תמורות מהצורה $(12)(34)$ הן מסדר 2 ותמורות מהצורה $(12)(345)$ הן מסדר 6. לכן סה"כ סדרי האיברים ב- S_5 הם $1,2,3,4,5,6$. מתקיים $lcm(1,2,3,4,5,6)=60$ לכן $\exp(S_5)=60$.

שאלת בונוס 1: 10 נקודות

תהא G חבורה כך ש- $Z(G)=\{e_G\}$. הוכיחו כי $Z(Aut(G))=\{e_{Aut(G)}\}$.

יהי $f\in Z(Aut(G))$ ונסמן ב- φ_g את אוטומורפיזם ההצמדה. מתקיים: $f\varphi_g=\varphi_g f$. יהי $x\in G$. אזי:

$$f\varphi_g(x)=\varphi_g f(x)\to f\left(gxg^{-1}\right)=\varphi_g\left(f(x)\right)$$
$$f(g)f(x)f\left(g^{-1}\right)=gf(x)g^{-1}$$
$$g^{-1}f(g)f(x)=f(x)g^{-1}f(g)$$

נסמן $f(x)=y$. לכל y קיים x כזה (שכן f איזומורפיזם) ולכן:

$$\left(g^{-1}f(g)\right)y=y\left(g^{-1}f(g)\right)\to g^{-1}f(g)\in Z(G)\to g^{-1}f(g)=e$$
$$\to\forall g\in G\ \ f(g)=g\to f=Id$$

<u>שאלת בונוס 2: 10 נקודות</u>

תהי G חבורה ו- $A\triangleleft G$. נתון ש- G/A ציקלית. הוכיחו ש- $[G,A]=[G,G]$.

<u>פתרון:</u>

ההכלה $[G,A]\subseteq[G,G]$ היא טריוויאלית, ונותר להוכיח את ההכלה בכיוון ההפוך.

כלומר, יש להראות: $[G,A]\supseteq[G,G]$. נשים לב שמתקיים:

G/K אבלית $\Leftrightarrow$ $[G,G]\subseteq K$.

לכן נרצה להראות ש- $G/[G,A]$ אבלית.

נתון ש- G/A ציקלית. נסמן את היוצר ב- xA עבור $x\in G$. אזי ניתן לראות כי $G=\langle A,x\rangle$ (שימו לב ש- $G=\bigcup x^iA$ מכיוון ש- $Ax=xA$).

נתבונן בהעתקה הטבעית $\varphi:G\to G/[G,A]$ המוגדרת על ידי $\varphi(g)=g[G,A]$. נסמן בקיצור $g[G,A]=\overline{g}$ (ובאותו אופן נסמן גם: $\varphi(A)=\overline{A},\varphi(G)=\overline{G}$). בסימונים החדשים מתקיים: $\overline{G}=\langle\overline{A},\overline{x}\rangle$. נראה ש- $\overline{A},\{\overline{x}\}\subseteq Z(\overline{G})$ מה שיאמר ש- $\overline{G}\subseteq Z(\overline{G})$ ולכן $\overline{G}$ תהיה אבלית.

נראה תחילה ש- $\overline{A}\subseteq Z(\overline{G})$. יהי $\overline{g}\in\overline{G}$, ויהי $\overline{a}\in\overline{A}$. אזי $[\overline{a},\overline{g}]=\overline{[a,g]}=\overline{1}$ ולכן קיבלנו את הדרוש.

כעת נראה ש- $\{\overline{x}\}\subseteq Z(\overline{G})$:

כל איבר של G הוא מהצורה x^ia עבור $a\in A$ ולכן כל איבר של $\overline{G}$ הוא מהצורה $\overline{x^ia}$ עבור $\overline{a}\in\overline{A}$. אבל $\overline{x}$ מתחלף עם $\overline{x^i}\overline{a}$ ואלו הם כל איברי החבורה, ולכן $\overline{x}\in Z(\overline{G})$.

ולכן, בסה"כ, $\bar{G}$ וקיבלנו את הדרוש.

<u>בונוס 3:</u>

תהא H תת חבורה p סילו של G. הוכיחו ש- $N(N(H))=N(H)$.

<u>פתרון:</u>

א. ידוע שלכל $A\le G$ מתקיים $A\triangleleft N(A)$ ובפרט $A\subseteq N(A)$. אם ניקח $A=N(H)$ נקבל $N(H)\subseteq N(N(H))$. נראה כעת את ההכלה בכיוון ההפוך.

יהי $y\in N(N(H))$, כלומר $yN(H)y^{-1}=N(H)$. צריך להראות ש- $y\in N(H)$, כלומר $yHy^{-1}=H$. $H\subseteq N(H)$ ולכן $yHy^{-1}\subseteq yN(H)y^{-1}=N(H)$. מכיוון ש- H היא תת חבורה p סילו, גם yHy^{-1} היא תת חבורה p סילו ולפי התרגיל הקודם היא תת חבורה p סילו יחידה של $N(yHy^{-1})$. אבל:

$$N(yHy^{-1})=\{g\in G: gyHy^{-1}g^{-1}=yHy^{-1}\}=$$
$$=\{g\in G:(y^{-1}gy)H(y^{-1}gy)^{-1}=H\}=$$
$$=\{z\in G: zHz^{-1}=H\}=N(H)$$

ומכך ש- H היא תת חבורה p סילו יחידה של $N(H)$ נובע ש- $yHy^{-1}=H$ ולכן $N(N(H))\subseteq N(H)$.

ב. אם H היא לא תת חבורה p סילו אזי הטענה אינה בהכרח נכונה. דוגמא נגדית: $H=\langle(12)\rangle\le S_4$.