פתרון מבחן דמה למתמטיקאים תשע"ב

$$\sum(-1)^n ln\left(\frac{2+2+3+...+n}{1+2+3+...+n}\right)$$

$$\ln\left(1+\frac{1}{1+2+\cdots+n}\right)=\ln\left(1+\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}\right)$$

נבדוק ראשית התכנסות בהחלט.

נראה שטור זה חבר של הטור $\sum\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}$ אכן

$$\frac{\ln\left(1+\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}\right)}{\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}}\to 1$$

כי $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$

קל להוכיח שהטור $\sum\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}$ חבר של $\sum\frac{1}{n^2}$

וסה"כ הטור שבשאלה מתכנס בהחלט.

ב [עריכה]

$$\sum(-1)^n n\cdot ln(cos(\frac{1}{n}))$$

ננסה למצוא את החבר עם השיטות כמו קודם

$$-n\cdot\ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)=-n\cdot\ln\left(1+\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)-1\right)\right)=-n\cdot\frac{\ln\left(1+\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)-1\right)\right)}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)-1}\cdot\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)-1\right)$$

$$=-n\cdot\frac{\ln\left(1+\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)-1\right)\right)}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)-1}\cdot\frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)-1}{\left(\frac{1}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n}\cdot\left[-1\cdot\frac{\ln\left(1+\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)-1\right)\right)}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)-1}\cdot\frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)-1}{\left(\frac{1}{n}\right)^2}\right]$$

סה"כ טור הערכים המוחלטים חבר של $\frac{1}{n}$ ולכן הטור אינו מתכנס בהחלט.

נותר לבדוק האם הוא מתכנס לפי לייבניץ

שוב נעבור לחקור את הפונקציה

$$h(x) = -x \cdot \ln\left(cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$h'(x) = -\ln\left(cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) - x \cdot \frac{1}{\cos\left(\frac{1}{x}\right)} \cdot \left(-\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) =$$

$$= -\ln\left(cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) - \frac{1}{x} \cdot \tan\left(\frac{1}{x}\right) = -\left[\ln\left(cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) + \frac{\tan\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\right]$$

נגזור שוב

$$h''(x) = -\left[\frac{1}{\cos\left(\frac{1}{x}\right)} \cdot \left(-\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{x^2}\tan\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\cos^2\left(\frac{1}{x}\right)}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right] =$$

$$= -\left[\frac{\tan\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2} - \frac{\tan\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2} - \frac{1}{x^3\cos^2\left(\frac{1}{x}\right)}\right] = \frac{1}{x^3\cos^2\left(\frac{1}{x}\right)}$$

הנגזרת השנייה חיובית בכל החיוביים, ולכן הנגזרת הראשונה עולה.

כיוון שגבול הנגזרת הראשונה באינסוף הוא אפס,

$$\lim_{x\to\infty} -\left[\ln\left(cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) + \frac{\tan\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\right] = 0$$

לכן הנגזרת הראשונה שלילית בכל החיוביים, ולכן הפונקציה המקורית יורדת בכל החיוביים

ולכן לכל $n + 1 > n$ מתקיים כי

$$h(n+1) < h(n)$$

ולפי משפט לייבניץ הטור מתכנס, וסה"כ מתכנס בתנאי.

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{\sqrt{n}}}$$

$$n^{\frac{1}{\sqrt{n}}} = e^{\ln\left(n^{\frac{1}{\sqrt{n}}}\right)} = e^{\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}} \to e^0 = 1$$

כאשר השתמשנו במשפט סדרי הגודל.

ב [עריכה]

$$\lim_{x\to\infty} x\left[ln^2(x+1) - ln^2(x-1)\right]$$

$$x(\ln(x+1)+\ln(x-1))(\ln(x+1)-\ln(x+1)) = x\cdot\ln(x^2-1)\cdot\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) =$$
$$= \ln(x^2-1)\cdot\ln\left(\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x\right) \to_{x\to\infty} \infty\cdot e^2 = \infty$$

$$\left(\underbrace{\frac{x+1}{x-1}}_{\to 1}\right)^x \to e^{\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\left(\frac{x+1}{x-1}-1\right)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\left(\frac{2}{x-1}\right)} = e^2$$

שאלה 3 עוסקת בשארית טיילור לפי לגראנז', לא נפתור אותה כאן.

שאלה 4:

א [עריכה]

יהיו f,g פונקציות רציפות בבל הממשיים המקיימות $\forall x\in\mathbb{Q}: f(x)=g(x)$

הוכח כי $f\equiv g$ על כל הממשיים.

יהי $x_0\notin\mathbb{Q}$ צריך להוכיח ש $f(x_0)=g(x_0)$

תהי $x_n\to x_0$ כך ש $x_n\in\mathbb{Q}$

כיוון שהפונקציות שוות על מספרים רציונאליים

$$f(x_n)=g(x_n)$$

לכן

$$\lim f(x_n)=\lim g(x_n)$$

לכן

$$f(x_0)=g(x_0)$$

וסיימנו.

ב [עריכה]

מצא לאילו ערכי α ובאילו נקודות הפונקציה הבאה גזירה:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x^3-x+\alpha & x\in\mathbb{Q}\\ \frac{1}{2}x^2-x & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

יהי $x_0\in\mathbb{R}$ נבדוק האם $f(x)$ רציפה בx_0

צריכים ש

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$$

צריך שלכל סדרת רציונאליים וכל סדרת אי רציונאליים השואפות לx_0 הגבול יהיה $f(x_0)$

זה גם יספיק, כי כל סדרה בעולם אפשר לחלק לרציונאליים או אי רציונאליים.

תהי $x_n\in\mathbb{Q}$ כך $x_0\neq x_n\to x_0$

$$f(x_n)=\frac{1}{3}x_n^3-x_n+\alpha\to\frac{1}{3}x_0^3-x_0+\alpha$$

תהי $y_n\notin\mathbb{Q}$ כך ש $x_0\neq y_n\to x_0$

$$f(y_n)=\frac{1}{2}y_n^2-y_n\to\frac{1}{2}x_0^2-x_0$$

לצורך רציפות צריך שהדברים יהיו שווים וגם שווים לערך בנקודה

$$\frac{1}{3}x_0^3-x_0+\alpha=\frac{1}{2}x_0^2-x_0$$

$$\frac{1}{3}x_0^3-\frac{1}{2}x_0^2+\alpha=0$$

$$\alpha=x_0^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}x_0\right)$$

נבדוק גזירות

יהי x_0 כיוון שאנחנו רוצים לפחות רציפות בx_0 אזי $\alpha=x_0^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}x_0\right)$

נבדוק גזירות

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

צריך שיהיה אותו גבול סופי גם לרציונאליים וגם לאי רציונאליים

$$f(x_0) = \frac{1}{2}x_0^2 - x_0$$

לסדרת רציונליים $x_0 \neq x_n \to x_0$

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\frac{1}{3}x_n^3 - x_n + x_0^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}x_0\right) - \left(\frac{1}{2}x_0^2 - x_0\right)}{x_n - x_0} = \left\{\frac{0}{0}, L'Hopital\right\} = x^2 - 1 \to x_0^2 - 1$$

לסדרת אי רציונאליים $x_0 \neq y_n \to x_0$

$$\frac{f(y_n) - f(x_0)}{y_n - x_0} = \frac{\frac{1}{2}y_n^2 - y_n - \left(\frac{1}{2}x_0^2 - x_0\right)}{y_n - x_0} = \left\{\frac{0}{0}, L'Hopital\right\} = y - 1 \to x_0 - 1$$

צריך ש

$$x_0 - 1 = x_0^2 - 1$$

כלומר $x_0 = 0,1$

והα המתאימות הן $\alpha = 0, \frac{1}{6}$

5 [עריכה]

תהי f פונקציה רציפה וחסומה בקטע $(a,b]$ וגזירה בקטע (a,b)

א [עריכה]

נניח כי f אינה רציפה בקטע הסגור $[a,b]$ לכל הצבה של $f(a)$. הוכח כי הנגזרת f' אינה חסומה מלעיל ואינה חסומה מלרע בקטע (a,b)

ב [עריכה]

הוכח שהביוון ההפוך אינו נכון באופן כללי: תן דוגמא לפונקציה f כך שהנגזרת f' אינה חסומה מלעיל ואינה חסומה מלרע בקטע (a,b), ואילו f רציפה בקטע הסגור $[a,b]$.

סעיף א':

כיוון שלכל הצבה של $f(a)$ הפונקציה לא תהא רציפה בקטע הסגור, זה אומר שאין גבול סופי בa מימין, וכיוון שהפונקציה חסומה זה אומר שאין גבול בכלל.

לכן קיימות סדרות שונות $a < x_n, y_n \to a$ כך ש

$$f(x_n) \to L$$
$$f(y_n) \to K > L$$

מי מבטיח שיש סדרות עליהן הפונקציה מתכנסת?

אם $f(x_n)$ מתבדרת, ניקח תת סדרה עליה $f\left(x_{k_n}\right)$ מתכנסת.

כיוון שהפונקציה חסומה, זה יתכנס לגבול סופי.

הרחבה:

הגדרת הגבול לפי היינה אומרת שL $f(x) \to_{x\to a^+}$ אם לכל סדרה $a < x_n \to a$ מתקיים כי $f(x_n) \to L$

מה זה אומר שהגבול אינו L? שקיימת סדרה $a < x_n \to a$ עליה $f(x_n) \to L$

האם בהכרח $f(x_n)$ מתכנסת לאנשהו? לא.

אבל, לכל סדרה יש תת סדרה שמתכנסת במובן הרחב (תת סדרה מונוטונית), ולכן ניתן לבחור תת סדרה x_{k_n} כך ש $f(x_{k_n})$ מתכנסת במובן הרחב, וכמובן שעדיין $a < x_{k_n} \to a$.

נחזור לתרגיל:

נבחר תתי סדרות כך שבסופו של יום

$$x_n > y_n$$

כעת נביט בסדרת שיפועי המיתרים

$$\frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n} \to \left\{\frac{L-K}{0^+}\right\} \to -\infty$$

לפי לגראנז' קיימות נקודות $y_n < c_n < x_n$ כך ש

$$f'(c_n) = \frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n}$$

ולכן f' אינה חסומה מלרע.

באופן דומה אפשר לקחת תתי סדרות עליהן $y_n < x_n$ ונקבל סדרת ערכי הנגזרת ששואפת לאינסוף.

לסעיף ב' נתחיל מ

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

אבל אין לה גבול באפס ובוודאי אינה רציפה

$$f(x) = x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

יש לה גבול באפס, אבל אינה מוגדרת שם

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

זו כבר פונקציה רציפה בכל הממשיים, אבל מספיק לנו $[0,1]$.

נחשב את הנגזרת בקטע $(0,1)$

$$f'(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right) =$$

כעת $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ חסומה, השאלה היא אם $\frac{1}{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ אינה חסומה מלעיל ומלרע, והתשובה היא שאכן היא לא חסומה

אפשר לבנות סדרות $0 \to a_n < 0$ כך ש $\cos\left(\frac{1}{a_n}\right) = 1$ ולכן נקבל כי

$$\frac{1}{a_n}\cos\left(\frac{1}{a_n}\right) \to \infty$$

וסדרה $0 \to b_n < 0$ כך ש $\cos\left(\frac{1}{b_n}\right) = -1$ ואז נקבל כי

$$\frac{1}{b_n}\cos\left(\frac{1}{b_n}\right) \to -\infty$$