

תרגיל 6' אינפי 3 תשע"ח

1. האם קיימת סביבה בה המשוואה $\sin x + \sinh y + 1 = 0$ מגדירה את y כפונקציה סתומה של x , $y = f(x)$?

2. הוכיחו שהמשוואות הבאות מגדירות את z כפונקציה של המשתנים x, y בסביבת הנקודה $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$, וחשבו את הנגזרות z_x, z_y בנקודה:

(א) $F(x, y, z) = y^2 + xy + z^2 - e^z - 4 = 0$ בסביבת $(0, e, 2)$. חשבו גם את z_{yy} .

(ב) $F(x, y, z) = xz + y \ln z + x^2 = 0$ בסביבת $(-2, 0, 2)$. חשבו גם את z_{xy} .

3. נתונה המשוואה:

$$\sqrt{x^2 + y^5 + \cos z} - 1 - z^4 = 0$$

האם המשוואה מגדירה את z כפונקציה של x, y בסביבת הנקודה $(-1, 0, 0)$? את x כפונקציה של z ? את y כפונקציה של z ?

4. הוכיחו כי קיים כדור כלשהו $B \subseteq \mathbb{R}^4$ שמרכזו בנקודה $(2, 1, -1, -2)$, וקיימות פונקציות $f, g : B \rightarrow \mathbb{R}$ גזירות ברציפות עבורן:

$$f(2, 1, -1, -2) = 4, g(2, 1, -1, -2) = 3$$

ולכל נקודה $(x, y, z, a) \in B$ מתקיים:

$$f^2 + g^2 + a^2 = 29, \frac{f^2}{x^2} + \frac{g^2}{y^2} + \frac{a^2}{z^2} = 17$$

5. הוכיחו כי המערכת:

$$\begin{cases} u + v = x + y \\ \frac{\sin u}{\sin v} = \frac{x}{y} \end{cases}$$

מגדירה פונקציות דיפרנציאביליות $u(x, y), v(x, y)$ עבורן:

$$u\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right) = v\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}$$

6. תהי $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה המוגדרת על ידי: $f(x, y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$. הוכיחו ש- f הפיכה בסביבת כל נקודה פרט לראשית $(0, 0)$ וחשבו את f^{-1} .

7. הוכיחו כי הפונקציה $f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$ הפיכה מקומית בסביבת כל נקודה אך לא הפיכה.