

גאומטריה דיפרנציאלית 1 – תרגיל 1 (הסכם הסכימה של איינשטיין)

המלצה: ראשית רישמו מי הם אינדקסי הסכימה ומי הם האינדקסים החופשיים.

שאלה 1

פשטו ככל הניתן את הביטויים הבאים. הניחו כי כל הוקטורים הם ב- \mathbb{R}^3 וכי כל המטריצות הן ב- $M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$.

- (א) $\delta^a_b g_{ca} g^{bd} \delta^c_d$
- (ב) $\delta^i_j g_{ik} \delta^k_m$
- (ג) $\delta^i_j u^i v^j$
- (ד) $a^i_j b^j_k c^k_m d^m_n$
- (ה) $u^k v^a \delta^i_n$
- (ו) $\delta_{ij} a^{ij}$
- (ז) $g^{1a} g_{a1}$
- (ח) $\delta^i_j \delta^j_k \delta^k_i$
- (ט) $\delta^1_a \delta^a_b \delta^b_c \delta^c_d \delta^d_2$

שאלה 2

כיתבו את הביטויים הבאים ללא סימוני סימטריזציה ואנטיסימטריזציה, ועבור כל ביטוי ציינו מי הם האינדקסים החופשיים ומי הם האינדקסי הסכימה.

- (א) $a^i_j g^{k[m} b^{n]}$
- (ב) $L_{\{a\}} g^{ab} g_{bc}$
- (ג) $\delta^i_{\{j} \delta^j_{k\}} \delta^k_m$ (ב- \mathbb{R}^3)

שאלה 3

יהיו $A=(a^i_j)$, $B=(b^i_j)$ מטריצות. נסמן $C=AB$.

- (א) הראו כי $2a^i_{[j} b^j_{k]} = c^i_k - a^i_k \text{Tr}(B)$ לכל $1 \leq i, k \leq n$.
- (ב) הראו כי $2a^i_{[j} b^j_{k]} = c^i_k - b^i_k \text{Tr}(A)$ לכל $1 \leq i, k \leq n$.
- (ג) נתון כי $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(B) \neq 0$. הראו כי $A=B$ אם"מ לכל $1 \leq i, k \leq n$ מתקיים $a^i_{[j} b^j_{k]} = a^{[i} b^{j]}$.

שאלה 4

- (א) נניח כי (δ^i_j) היא מטריצת היחידה מסדר 7×7 . פשטו ככל הניתן את $\delta^i_{\{j} \delta^j_{i\}}$.
- (ב) נתון כי $\delta^i_{\{j} \delta^j_{i\}} = 3$. כמה שורות יש למטריצה (δ^i_j) ?

שאלה 5

- (א) יהיו $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. הראו כי $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$. (השתמשו בהסכם הסכימה של איינשטיין).
- (ב) יהיו $A, B, C \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. הראו כי $A(B+C) = AB+AC$. (השתמשו בהסכם הסכימה של איינשטיין).
- (ג) הראו כי (a_{ij}) מטריצה סימטרית אם"מ $a_{[ij]} = 0$ לכל i, j , וכי היא אנטי-סימטרית אם"מ $a_{\{ij\}} = 0$ לכל i, j .