

שאלון בחינה בקורס: גיאומטריה דיפרנציאלית (526-88)

שם המרצה: פרופ' מיכאל כץ

סמסטר א', מועד א': 08.2.2011

יש לנמק את כל התשובות.

משך הבחינה: שעתיים וחצי.

1. יהי $k > 0$. תהי $f(x, y)$ פונקציה המקיימת $f(0, 0) = 0$, $f(x, y) \geq k(x^2 + y^2)$.
 1. מצא חסם תחתון לכל ערך עצמי של ההסיאן (Hessian) של f .
 2. מצא חסם תחתון לעקמומיות גאוס של גרף של f בנקודה $(0, 0)$.
 3. תהי M משטח סגור במרחב תלת-מימדי. נניח שנקודה P על M הרחוקה ביותר מראשית הצירים. מצא סימן של עקמומיות גאוס של M בנקודה P .
 4. הגדר עקמומיות ממוצעת של M ומצא סימנה בנקודה P .

2. בקואורדינטות $(u^1, u^2) = (x, y)$, נניח $f(x, y) = \frac{9}{y}$ ונתבונן במטריקה מוגדרת על ידי

$$f(x, y)^2 (dx^2 + dy^2)$$

1. חשב את המקדמים $\Gamma_{11}^1, \Gamma_{21}^1, \Gamma_{12}^1, \Gamma_{22}^1$ של המטריקה.
2. הגדר אופרטור Laplace-Beltrami Δ_{LB} .
3. תנו נוסחה לעקמומיות של Gauss באמצעות אופרטור Δ_{LB} .
4. חשב את $K = K(x, y)$ של המטריקה.

3.

1. הוכח את הנוסחה ל Γ_{ij}^k באמצעות המקדמים g_{ij} .
2. הוכח שהביטוי $\frac{\partial}{\partial u^k} (\Gamma_{ij}^l x_l + L_{ij} n)$ הוא סימטרי ב- j ו- k .
3. הסבר היחס בין מקדמים L_{ij} לבין L_i^k .
4. בטא את הביטוי $L_{[j} L_{l]}^k$ באמצעות מקדמים של מטריקה.

4. יהי טורוס T^2 ב- \mathbb{R}^3 עם פרמטריזציה

$$x(\theta, \varphi) = ((4 + 3 \cos \phi) \cos \theta, (4 + 3 \cos \phi) \sin \theta, 3 \sin \phi)$$

1. מצא אורך של θ -לולאה ושל φ -לולאה.
2. הגדר את הפרמטר הקונפורמי τ של הטורוס.
3. מצא פרמטר קונפורמי $\tau = \tau(T^2)$ באמצעות אינטגרל ומצא ערך של אינטגרל.

5. כתוב את הביטויים הבאים באמצעות L_{ij}^k, L_i^k , וגם L_{ij} :

$$\langle x_{ij}, x_k \rangle g^{ik} \quad .1$$

$$\langle n_j, x_k \rangle \quad .2$$

$$\langle n_j, x_{lk} \rangle \quad .3$$

$$\langle n, x_{pq} \rangle g^{qs} \quad .4$$

בהצלחה!