מבחן לינארית 1 קיץ תשפא מועד ב-פתרון

ו' תשרי תשפ"ב, 12.9.2021

מרצים: גיא בלשר, תמר בר-און, אליהו מצרי, אלעד עטייא, ארז שיינר.
מתרגלים: אחיה בר-און, תמר בר-און, אריאל ויצמן, עוזי חרוש, נועה כהן, נעם פרץ, גלעד פורת קורן, הראל רוזנפלד.
הנחיות:

- ענו על כל השאלות.
- חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.
- השאלות לא מסודרות בהכרח לפי רמת קושי- מומלץ להתחיל עם שאלות שאתם יודעים לפתור.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לענות. חלקו את זמנכם בתבונה!.

תשובות יש לכתוב על גבי הטופס בלבד. מחברת הטיוטה לא תבדק..

ניתן לענות משני צידי הדף..

בהצלחה!

1. (21 נק') יהא $a \in \mathbb{R}$ פרמטר ונגדיר

$$v_1 = \begin{pmatrix} a \\ a \\ -a \\ 0 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ a^2+1 \\ -a^2-1 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \\ a+1 \end{pmatrix},\ v_4 = \begin{pmatrix} a \\ a+1 \\ -1 \\ a^2+a+1 \end{pmatrix}$$

(וקטורים ב $\mathbb{R}^4$). ענו על הסעיפים הבאים:

(א) קבעו והוכיחו לאילו ערכים של a מתקיים $v_4 \in \text{span}\{v_1, v_2, v_3\}$.

פתרון:

מתקיים ש $v_4 \in \text{span}\{v_1, v_2, v_3\}$ אמ"מ למערכת

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 0 & 1 & a \\ a & a^2+1 & 1 & a+1 \\ -a & -a^2-1 & a & -1 \\ 0 & 0 & a+1 & a^2+a+1 \end{array}\right)$$

יש פתרון (ואז כל פתרון למערכת יתן מקדמים לצירוף לינארי של v_1, v_2, v_3 ששווה ל v_4). נדרג ונבדוק מתי יש פתרון, שזה שקול למתי אין שורת סתירה.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 0 & 1 & a \\ a & a^2+1 & 1 & a+1 \\ -a & -a^2-1 & a & -1 \\ 0 & 0 & a+1 & a^2+a+1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3+R_1]{R_2-R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} a & 0 & 1 & a \\ 0 & a^2+1 & 0 & 1 \\ 0 & -a^2-1 & a+1 & a-1 \\ 0 & 0 & a+1 & a^2+a+1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3+R_2}$$

$$\xrightarrow{R_3+R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} a & 0 & 1 & a \\ 0 & a^2+1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a+1 & a \\ 0 & 0 & a+1 & a^2+a+1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_4-R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} a & 0 & 1 & a \\ 0 & a^2+1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a+1 & a \\ 0 & 0 & 0 & a^2+1 \end{array}\right)$$

ומכיוון ש a ממשיאז $a^2+1 \neq 0$ ולכן יש שורת סתירה תמיד. מכאן שאין ערך a ממשי עבורו $v_4 \in \text{span}\{v_1, v_2, v_3\}$

(ב) לכל ערך של a, מצאו את המימד של $\text{span}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

פתרון:

השאלה שקולה למציאת מימד מרחב העמודות של המטריצה M (M מהסעיף הבא ושדירגו בסעיף הקודם). קיבלו אחרי דירוג

$$M \to \cdots \to \begin{pmatrix} a & 0 & 1 & a \\ 0 & a^2+1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a+1 & a \\ 0 & 0 & 0 & a^2+1 \end{pmatrix}$$

ומכיוון ש:

- עבור $a \neq -1$ וגם $a \neq 0$ נקבל מטריצה מדורגת עם 4 איברים מובילים ולכן $\dim C(M) = 4$.
- עבור $a = 0$ נקבל מטריצה שנמשיך לדרג

$$M \to \cdots \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

והגענו לצורה מדורגת עם 3 משתנים תלויים ולכן $\dim C(M) = 3$.

- עבור $a=-1$ נקבל מטריצה שנמשיך לדרג

$$M\to\cdots\to\begin{pmatrix}-1&0&1&-1\\0&2&0&1\\0&0&0&-1\\0&0&0&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&0&1&-1\\0&2&0&1\\0&0&0&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

והגענו לצורה מדורגת עם 3 משתנים תלויים ולכן $\dim C(M)=3$.

(ג) הביעו באמצעות הפרמטר a את הדטרמיננטה של המטריצה

$$M=\begin{pmatrix}a&0&1&a\\a&a^2+1&1&a+1\\-a&-a^2-1&a&-1\\0&0&a+1&a^2+a+1\end{pmatrix}$$

(כלומר, המטריצה שעמודותיה הן הוקטורים v_1,v_2,v_3,v_4).

פתרון:

נשים לב שבדירוג של M בסעיף הראשון, התשמשנו רק בפעולות שלא משנות את הדטרמיננטה ולכן

$$|M|=\left|\begin{pmatrix}a&0&1&a\\0&a^2+1&0&1\\0&0&a+1&a\\0&0&0&a^2+1\end{pmatrix}\right|=a\left(a+1\right)\left(a^2+1\right)^2$$

כאשר המעבר האחרון נכון כי זוהי דטרמיננטה של מטריצה משולשית.

2. (21 נק') נגדיר העתקה לינארית $T:\mathbb{R}^{2\times2}\to\mathbb{R}^{2\times2}$ ע"י הכלל

$$T(A)=A-A^t$$

(כאשר הקלט ל T הוא מטריצה $A\in\mathbb{R}^{2\times2}$). <u>אין צורך</u> להוכיח שזוהי העתקה לינארית. בנוסף, נגדיר

$$B=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$

$$C=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\right\}$$

שני בסיסים סדורים (משמאל לימין) של $\mathbb{R}^{2\times2}$. ענו על הסעיפים הבאים:

(א) מצאו את המטריצה המייצגת $[T]_B^C$ ואת המטריצה המייצגת $[T]_B^B$.

פתרון:

כיוון ש

$$T\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

נקבל, לפי הגדרה ש

$$[T]_B^B = \left(\begin{array}{cccc} | & | & | & | \\ \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_B & \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right]_B & \left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]_B & \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_B \\ | & | & | & | \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ובנוסף,

$$T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$T\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

נקבל ש

$$[T]_B^C = \left(\begin{array}{cccc} | & | & | & | \\ \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_B & \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_B & \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_B & \left[\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\right]_B \\ | & | & | & | \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(ב) מצאו בסיס ומימד ל $\mathrm{Im}T$ ומצאו בסיס ומימד ל $\ker T$.

פתרון:

בסעיף קודם, קיבלנו ש (ונמשיך לדרג)

$$[T]_B^C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ומכיוון ש

$$[\ker T]_C = N([T]_B^C) = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

נקבל ש

$$\ker T = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

והמימד 3(המטריצות שב span מהוות בסיס). בנוסף, כיוון ש

$$[\mathrm{Im}T]_B = C([T]_B^C) = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(העמודה האחרונה במטריצה המקורית, כי אחרי דירוג רק בעמודה האחרונה יש איבר מוביל) נקבל ש

$$\mathrm{Im}T = \mathrm{span}\left\{-2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\} = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

והמימד 1(המטריצה שב span מהוה בסיס).

(ג) מצאו את המטריצה המייצגת $[T^2]_C^C$, כאשר T^2 היא ההעתקה הלינארית $T \circ T$.

פתרון:

כיוון ש

$$\begin{aligned}
T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
T\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

נקבל ש

$$\begin{aligned}
T^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
T^2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &= T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
T^2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
T^2\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &= 2T\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ולכן

$$[T^2]_C^C = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_C & \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_C & \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]_C & \left[4\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]_C \\ | & | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

3. (21 נק') תזכורת: $\mathbb{R}_n[x]$ הוא המרחב הוקטורי של כל הפולינומים שדרגתם קטנה שווה מ n עם מקדמים ב $\mathbb{R}$.

יהא $a \in \mathbb{R}$ פרמטר ונגדיר

$$W_a = \{p(x) \cdot (x-a) \mid p(x) \in \mathbb{R}_2[x]\}$$

תת קבוצה של פולינומים שמוכלת ב $\mathbb{R}_3[x]$. ענו על הסעיפים הבאים:

(א) הוכיחו כי W_a הוא תת מרחב של $V = \mathbb{R}_3[x]$.

פתרון:

נוכיח לפי הקריטריון המקוצר:

- פולינום האפס שייך ל W_a: אכן עבור $0+0x+0x^2 \in \mathbb{R}_2[x]$ מתקיים
$$0+0x+0x^2+0x^3=\left(0+0x+0x^2\right)(x-a)\in W_a$$
- סגירות לחיבור וכפל בסקלר: לכל α ממשי ולכן $q_1(x),q_2(x)\in W$ מתקיים שקיימים $p_1(x),p_2(x)\in\mathbb{R}_2[x]$ כך ש
$$\begin{aligned}q_1(x)&=p_1(x)\cdot(x-a)\\ q_2(x)&=p_2(x)\cdot(x-a)\end{aligned}$$
ולכן
$$\alpha q_1(x)+q_2(x)=\alpha p_1(x)\cdot(x-a)+p_2(x)\cdot(x-a)=(\alpha p_1(x)+p_2(x))\cdot(x-a)$$
ומכיוון ש $\alpha p_1(x)+p_2(x)\in\mathbb{R}_2[x]$ נקבל ש $\alpha q_1(x)+q_2(x)\in W$ כמבוקש.

(ב) מצאו בסיס ומימד ל W_a.

פתרון:

נשים לב ש
$$\left\{x-a,x(x-a),x^2(x-a)\right\}\subseteq W_a$$
והייצוג של שלושת הפולינומים האלו לפי הבסיס הסטנדרטי (נשים אותם במטריצה ונדרג:
$$\begin{pmatrix}-a&0&0\\1&-a&0\\0&1&-a\\0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-a&0&0\\1&-a&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-a&0&0\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$
ולכן שלושת הפולינומים בת"ל (כי הייצוג שלהם, הם שלושה וקטורים בת"ל לפי הדירוג לעיל). לכן $3\le\dim W_a$. מכיוון ש $W_a\subseteq\mathbb{R}_3[x]$ מתקיים כי
$$\dim W_a\le\dim\mathbb{R}_3[x]=4$$
ולכן בשביל להוכיח כי $\dim W_a=3$ מספיק להוכיח כי $\dim W_a\neq 4$. אכן, נניח בשלילה כי $\dim W_a=4$ אזי לפי שיוון מימדים והכלה נקבל כי $W_a=\mathbb{R}_3[x]$ ובפרט, עבור הפולינום 1 קיים $p(x)$ כך ש
$$p(x)\cdot(x-a)=1$$
אבל הצבת a בפולינום משמאל יהיה שווה אפס והצבת a בפולינום מימין (הקבוע 1) יתן 1. סתירה.

(ג) הוכיחו שלכל שני מספרים ממשיים שונים $a_1\neq a_2$ מתקיים כי $W_{a_1}+W_{a_2}=\mathbb{R}_3[x]$.

פתרון:

יהיו $a_1\neq a_2$ שני מספרים ממשיים שונים. ראינו בסעיף הקודם כי $\dim W_{a_1}=\dim W_{a_2}=3$ ולכן, לפי משפט המימדים
$$\dim\left(W_{a_1}+W_{a_2}\right)=\dim W_{a_1}+\dim W_{a_2}-\dim\left(W_{a_1}\cap W_{a_2}\right)=6-\dim\left(W_{a_1}\cap W_{a_2}\right)$$
ונראה כי $\dim\left(W_{a_1}\cap W_{a_2}\right)\le 2$ ואז $\dim\left(W_{a_1}+W_{a_2}\right)\ge 6-2=4$ ומכיוון ש $W_{a_1}+W_{a_2}$ מוכל ב V נקבל $\dim\left(W_{a_1}+W_{a_2}\right)\le 4$ ובסה"כ $\dim\left(W_{a_1}+W_{a_2}\right)=4$ ומכיוון שהוא מוכל ב V מאותו מימד הם שווים. נחזור לטענה: $\dim\left(W_{a_1}\cap W_{a_2}\right)\le 2$הוכחה: כיוון ש $W_{a_1}\cap W_{a_2}\subseteq W_{a_1}$ נקבל ש $\dim\left(W_{a_1}\cap W_{a_2}\right)\le\dim W_{a_1}=3$ ולכן נשאר רק לשלול את האפשרות ש $\dim\left(W_{a_1}\cap W_{a_2}\right)=3$. אכן, נניח בשלילה ש $\dim\left(W_{a_1}\cap W_{a_2}\right)=3$ ונקבל ש $W_{a_1}\cap W_{a_2}$ מוכל ב W_{a_1}מאותו מימד ולכן שווים. בפרט $x-a_1\in W_{a_2}$ ולכן קיים $p(x)$ כך ש
$$p(x)\cdot(x-a_2)=x-a_1$$
אבל הצבת a_2 בפולינום משמאל יהיה שווה אפס והצבת a_2 בפולינום מימין יתן a_2-a_1 ששונה מאפס (כי $a_1\neq a_2$). סתירה.

4. (21 נק').

(א) תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית שאינה הפיכה. הוכיחו את הטענה הבאה:
$\dim\left(N(A)\cap N(A^t)\right)\geq 1$ אם ורק אם קיימת מטריצה סימטרית $B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ שונה מאפס כך ש $AB=BA=0$.
פתרון:
$(\Rightarrow)$ נניח שקיימת מטריצה סימטרית $B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ שונה מאפס כך ש $AB=BA=0$. אז בפרט קיימת עמודה $C_j(B)\neq 0$ ולכן

$$0=C_j(0)=C_j(AB)=AC_j(B)$$

ולכן $C_j(B)\in N(A)$. בנוסף, כיוון ש B סימטרית, $R_j(B)=C_j(B)^t=0^t=0$ ולכן

$$0=R_j(0)=R_j(BA)=R_j(B)A$$

ולכן

$$0=A^tR_j(B)^t=A^tC_j(B)$$

ולכן $C_j(B)\in N(A^t)$ ולכן $0\neq C_j(B)\in N(A)\cap N(A^t)$ ובפרט $\dim\left(N(A)\cap N(A^t)\right)\geq 1$ כנדרש.
$(\Leftarrow)$ נניח $\dim\left(N(A)\cap N(A^t)\right)\geq 1$ אזי קיים $0\neq v\in N(A)\cap N(A^t)$. נגדיר $B=v\cdot v^t$ ואז:

- B סימטרית כי $B^t=\left(vv^t\right)^t=\left(v^t\right)^tv^t=v\cdot v^t=B$.
- B שונה מאפס כי $v\neq 0$ ולכן קיים רכיב $v_i\neq 0$ ולכן $B_{i,i}=R_i(v)\cdot C_i(v^t)=R_i(v)\cdot R_i(v)^t=v_i\cdot v_i=v_i^2\neq 0$.
- B מקיימת $AB=BA=0$ כי

$$AB=A\left(v\cdot v^t\right)=Av\cdot v^t=0\cdot v^t=0$$

כאשר המעבר באדום כי $v\in N(A)$. ובנוסף

$$BA=vv^tA=v0=0$$

כאשר המעבר בכול כי $v\in N(A^t)$ ולכן $A^tv=0$ ולכן, נשלף ונקבל ש $v^tA=0$.

(ב) <u>הוכיחו או הפריכו</u>: לכל מטריצה ריבועית $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$, אם $\text{rank}A<\frac{n}{2}$ אז קיימת מטריצה סימטרית $B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ שונה מאפס כך ש $AB=BA=0$.
פתרון:
נשתמש בתנאי השקול מהסעיף הראשון בשביל להוכיח: תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$, כך ש $\text{rank}A<\frac{n}{2}$. לפי משפט הדרגה

$$\dim N(A)+\dim\text{rank}A=n$$

ולכן

$$\dim N(A)=n-\dim\text{rank}A>n-\frac{n}{2}=\frac{n}{2}$$

באופן דומה, מכיוון ש

$$\dim N(A^t)+\dim\text{rank}A^t=n$$

וגם $\dim\text{rank}A^t=\dim\text{rank}A$ נקבל

$$\dim N(A^t)=n-\dim\text{rank}A>n-\frac{n}{2}=\frac{n}{2}$$

ולכן, לפי משפט המימדים (בצירוף ש $\dim\left(N(A)+N(A^t)\right)\leq n$ כי $N(A)+N(A^t)$ מוכל ב $\mathbb{R}^n$):

$$\dim\left(N(A)\cap N(A^t)\right)=\dim N(A)+\dim N(A^t)-\dim\left(N(A)+N(A^t)\right)>\frac{n}{2}+\frac{n}{2}-n=0$$

ובפרט $\dim\left(N(A)\cap N(A^t)\right)\geq 1$.

(ג) <u>הוכיחו או הפריכו</u>: לכל מטריצה ריבועית $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$, אם $\text{rank}A\leq\frac{n}{2}$ אז קיימת מטריצה סימטרית $B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ שונה מאפס כך ש $AB=BA=0$.

פתרון:

נשתמש בתנאי השקול מהסעיף הראשון בשביל להפריך: נגדיר

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

אזי $\text{rank}A=1$ וגם

$$N(A)=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

ו

$$N(A^t)=N(\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix})=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

ולכן

$$N(A)\cap N(A^t)=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

ולכן $\dim\left(N(A)\cap N(A^t)\right)=0$.

5. (21 נק') יהא V מרחב וקטורי מימד n, ותהיינה שתי העתקות לינאריות (אופרטורים) $T,S:V\to V$.

<u>הוכיחו או הפריכו</u> כל אחד מהסעיפים הבאים:

(א) אם T העתקה הפיכה אזי קיים בסיס B למרחב V כך ש $[T]_B^B=\left[T^{-1}\right]_B^B$.

פתרון:

הפרכה: נסתכל על $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ המוגדרת $Tv=2v$ אזי $T^{-1}v=\frac{1}{2}v$ ומתקיים לכל בסיס $B=\{v_1,v_2\}$ ש

$$[T]_B^B=\begin{pmatrix}|&|\\Tv_1&Tv_2\\|&|\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}|&|\\2v_1&2v_2\\|&|\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$$

וגם

$$\left[T^{-1}\right]_B^B=\begin{pmatrix}|&|\\T^{-1}v_1&T^{-1}v_2\\|&|\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}|&|\\\frac{1}{2}v_1&\frac{1}{2}v_2\\|&|\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

ולכן $[T]_B^B\neq\left[T^{-1}\right]_B^B$.

(ב) אם T העתקה הפיכה אזי קיימים בסיסים B,C למרחב V כך ש $[T]_C^B=\left[T^{-1}\right]_B^C$.

פתרון:

הוכחה: נבחר בסיס $B=\{v_1,\ldots,v_n\}$ שרירותי ל V ונגדיר $C=\{Tv_1,\ldots,Tv_n\}$. מכיוון ש T הפיכה אזי $Tv_1,\ldots,Tv_n$ בת"ל (כי $v_1,\ldots,v_n$ בת"ל ו T חח"ע). ומכיוון ש C בת"ל עם $\dim V=n$ איברים נקבל ש C בסיס ל V לפי משפט השלישי חינם. כעת

$$[T]_C^B=I$$

כי לכל i מתקיים שהאיבר v_i מ B ממופה ל Tv_i שהוא האיבר ה i בבסיס C. כעת

$$\left[T^{-1}\right]_B^C = \left([T]_C^B\right)^{-1} = I^{-1} = I$$

ולכן הם שווים $[T]_C^B = \left[T^{-1}\right]_B^C$.

(ג) $\dim\ker T + \dim \mathrm{Im} S = \dim V$ אם ורק אם קיימים בסיסים B, C, D, E למרחב V כך ש $[T]_C^B = [S]_E^D$.

פתרון: הוכחה:

($\Rightarrow$) נניח שקיימים בסיסים B, C, D, E למרחב V כך ש $[T]_C^B = [S]_E^D$ אזי

$$\dim\ker T = \dim N([T]_C^B) = \dim N([S]_E^D) = \dim\ker S$$

ולכן

$$\dim\ker T + \dim \mathrm{Im} S = \dim\ker S + \dim \mathrm{Im} S = V$$

כאשר השיוון האחרון זה משפט הדרגה.

($\Leftarrow$) נניח $\dim\ker T + \dim \mathrm{Im} S = \dim V$, נקבל בצירוף משפט הדרגה כי

$$\dim\ker T + \dim \mathrm{Im} S = \dim V = \dim\ker S + \dim \mathrm{Im} S$$

ולכן $\dim\ker T = \dim\ker S$. נבחר בסיס $\{Tv_1, \dots, Tv_r\}$ לתמונה של T ו $\{\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_k\}$ בסיס לגרעין של T. במהלך הוכחת משפט הדרגה מראים ש

$$B = \{v_1, \dots, v_r, \hat{v}_1, \dots, \hat{v}_k\}$$

בסיס ל V. בנוסף נשלים את $\{Tv_1, \dots, Tv_r\}$ לבסיס של V שנסמנו C ונקבל ש

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

כאשר מטריצת היחידה בפינה השמאלית למעלה מגודל $r \times r$ (וכל שאר איברי המטריצה הם אפסים). למה? כי התמונה של v_i (האיבר ה i בבסיס B) היא Tv_i שהוא האיבר ב i בבסיס C. ושאר האיברים $\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_k$ נשלחים לאפס כי בגרעין של T ובפרט הייצוג שלהם זה עמודות אפסים. כעת, באותו אופן נוכל להגדיר בסיסים D, E ולקבל

$$[S]_E^D = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

כאשר מטריצת היחידה בפינה השמאלית למעלה מגודל $\dim\ker S \times \dim\ker S$ ומכיוון ש $\dim\ker T = \dim\ker S$ נקבל ש $\dim\ker S = r$ ולכן $[T]_C^B = [S]_E^D$כנדרש.