תרגול 13 – מופשטת 1 – קיץ 2013

סדרות נורמליות וסדרות הרכב

הגדרה:<u>סדרה נורמלית</u> של חבורה G היא סדרה של תת חבורות נורמליות:

$G = G_1 \rhd G_2 \rhd \ldots \rhd G_k = \{e\}$ (שימו לב שכל תת חבורה היא נורמלית בזו שלפניה, ולאו דווקא נורמלית בחבורה עצמה.)

חבורות המנה $0 \le i < k$, G_i / G_{i+1} נקראות **מנות**או**גורמים** של הסדרה.

<u>דוגמאות</u>

1. לכל חבורה G, $G \rhd \{e\}$ סדרה נורמלית. הגורם היחיד הוא $G/\{e\} \cong G$.
2. $S_3 \rhd \langle(123)\rangle \rhd \{id\}$ היא סדרה נורמלית. הגורמים הם $S_3 / \langle(123)\rangle \cong \mathbb{Z}_2$ וגם $\langle(123)\rangle / \{id\} \cong \mathbb{Z}_3$.

<u>הגדרה - עידון של סדרה נורמלית</u>

תהי $G = G_1 \rhd G_2 \rhd \ldots \rhd G_k = \{e\}$ סדרה נורמלית. עידון שלה הוא סדרה מהצורה $G = G_1 \rhd G_2 \rhd \ldots \rhd G_i \rhd G_i^* \rhd G_{i+1} \rhd \ldots \rhd G_k = \{e\}$ כאשרהגורמים של האיברים שהוספנו הם לא טריויאליים: $G_i / G_i^* \ne \{e\}$, $G_i^* / G_{i+1} \ne \{e\}$.

<u>הגדרה</u>

<u>סדרת הרכב</u> היא סדרה נורמלית שאין לה עידונים.

<u>משפט</u>

סדרה נורמלית היא סדרת הרכב אם ורק אם כל הגורמים של הסדרה הם פשוטים (כלומר המנות הן חבורות פשוטות).

<u>הערה</u>

חבורה אבלית היא פשוטה אם ורק אם היא ציקלית סופית מסדר ראשוני (זה מאפשר לנו לדעת בקלות שאם אחד הגורמים הוא אבלי, אך אינו ציקלי סופי מסדר ראשוני, אזי הסדרה **אינה** סדרת הרכב).

<u>דוגמאות</u>

1. תהא $G=\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_4$. סדרה נורמלית אפשרית היא: $G\rhd\mathbb{Z}_2\times\{0\}\rhd\{0\}\times\{0\}$. אך זאת לא סדרת הרכב, שכן ניתן לעדנה באופן הבא:
$G\ \rhd\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\ \rhd\ \mathbb{Z}_2\times\{0\}\ \rhd\ \{0\}\times\{0\}$, וזאת אכן סדרת הרכב.

2. $S_n\rhd A_n\rhd\{id\},\ n\geq 5$ סדרת הרכב כי כל הגורמים הם חבורות פשוטות.

3. למשל הסדרה $S_4\rhd A_4\rhd\{id\}$ היא לא סדרת הרכב כי ניתן לעדנה עם V_4.
שימו לב כי $S_4\rhd A_4\rhd V_4\rhd\{id\}$ עדיין אינה סדרת הרכב כי אפשר לעדנה עם $V_4\rhd W=\{id,(12)(34)\}$. לבסוף קיבלנו את הסדרה הנורמלית $S_4\rhd A_4\rhd V_4\rhd W\rhd\{id\}$ וזאת סדרת הרכב כי כל הגורמים הם מסדר 2 ולכן איזומורפיים ל- $\mathbb{Z}_2$ (ולכן פשוטים).

<u>חבורות פתירות</u>

<u>הגדרה</u>

חבורה היא <u>פתירה</u> אם יש לה סדרה נורמלית (לאו דווקא סדרת הרכב) כך שכל הגורמים הם אבלים.

<u>דוגמאות</u>

1. **כל** חבורה אבלית היא פתירה מכיוון ש- $G\rhd\{e\}$ והגורם $G/\{e\}\cong G$ אבלי.

2. כל החבורות הדיהדרליות פתירות, שכן מתקיים $D_n\rhd\langle\sigma\rangle\rhd\{e\}$ (הגורמים הם $\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_n$ בהתאמה).

3. חבורות שאינן פתירות: A_n,S_n עבור $n\geq 5$.

<u>תרגיל</u>

הראו שהחבורה $A=\left\{\begin{pmatrix}1 & a & b\\ 0 & 1 & c\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} : \ a,b,c\in\mathbb{Z}_p\right\}$ היא פתירה.

<u>פתרון</u>

ראינו כבר שמתקיים $|A|=p^3$ וכן A לא אבלית. ראינו בעבר ש- $|Z(A)|=p$ ולכן $\left|{}^{A}\!/_{Z(A)}\right|=p^2$ ולכן ${}^{A}\!/_{Z(A)}$ היא חבורה מסדר p^2 ולכן אבלית. נתבונן בסדרה הנורמלית: $A\rhd Z(A)\rhd\{I\}$. שני הגורמים הם אבליים ולכן A פתירה.

מש"ל

<u>משפט</u> (מוכיחים בהרצאה)

כל חבורת p היא פתירה.

<u>טענה</u>

תהא G חבורה מסדר pq (עבור p,q ראשוניים) אזי G פתירה.

<u>הוכחה</u>

אם $p=q$ אזי $|G|=p^2$ ולכן G אבלית ולכן פתירה.

אם $p\neq q$ נניח בה"כ $q>p$. על פי משפט סילו 3: $n_q\equiv 1(\bmod q)\ \wedge\ n_q\,|\,p$. אבל $q>p$ ולכן $n_q=1$ ולכן תת החבורה q-סילו Q היא נורמלית ב-G. נתבונן בסדרה הנורמלית: $G\rhd Q\rhd\{e\}$, אזי: $\left|{}^{G}\!/_{Q}\right|=\frac{pq}{q}=p$ ולכן ${}^{G}\!/_{Q}\cong\mathbb{Z}_p$ אבלית. כמו כן $\mathbb{Z}_q\cong Q\cong{}^{Q}\!/_{\{e\}}$ אבלית. כל הגורמים אבליים ולכן החבורה פתירה.

מש"ל

תרגיל

הוכיחו שכל חבורה G מסדר 1089 היא פתירה.

פתרון

$1089=3^2\cdot 11^2$. מתקיים: $n_{11}\equiv 1(\mathrm{mod}11)\ \wedge\ n_{11}|3^2$ ולכן $n_{11}=1$, ולכן תת החבורה 11-סילו Q היא נורמלית ומתקיים $|Q|=11^2$ ולכן היא אבלית. לפיכך, בסדרה הנורמלית $G\triangleright Q\triangleright\{e\}$ כל הגורמים הם אבליים ולכן החבורה G היא פתירה.

מש"ל

הקומוטטור

הגדרה: תהי G חבורה ויהיו $a,b\in G$. הקומוטטור של a,b מוגדר כ- $[a,b]=aba^{-1}b^{-1}$.

תת-חבורת הקומוטטור מוגדרת כ- $G':=\langle\{[a,b]\,|\,a,b\in G\}\rangle$ - כלומר התת החבורה הנוצרת על-ידי כל הקומוטטרים.

- שאלה: מתי $[a,b]=e$? תשובה: אם"ם $ab=ba$.

משפט

G אבלית אם ורק אם $G'=\{e\}$.

- שאלה: מהו $[a,b]^{-1}$? תשובה: $[a,b]^{-1}=(aba^{-1}b^{-1})^{-1}=bab^{-1}a^{-1}=[b,a]$.

הערה

אם $H\le G$ אז $H'\le G'$.

משפט

$G'\triangleleft G$.

<u>מסקנה</u>

אם G חבורה פשוטה שאינה אבלית אז $G'=G$.

<u>הוכחה</u>: $G'\triangleleft G$ לפי משפט קודם. בנוסף, מכיוון ש- G אינה אבלית אז $G'\neq\{e\}$ ולכן מכיוון ש- G פשוטה מתקיים $G'=G$.

<u>למשל</u>: $n\geq 5$, $(A_n)'=A_n$ כי לפי משפט A_n חבורה פשוטה שאינה אבלית**.**

<u>משפט</u>

G/G' היא המנה האבלית המקסימלית של G. כלומר:

א. לכל חבורה G, חבורת המנה G/G' היא אבלית;

ב. לכל $N\triangleleft G$, G/N אבלית אמ"מ $G'\leq N$ (G/N חבורת מנה של G/G').

[הערה: שימו לב מהיכן נובעת המקסימליות... איזו' 3. כלומר, $\dfrac{G/G'}{N/G'}$.]

<u>דוגמאות</u>

1. $D_4=\langle\sigma,\tau\rangle$: ראינו ש- $D_4\triangleright Z(D_4)=\{id,\sigma^2\}$. כמו כן $\left|D_4/Z(D_4)\right|=4$ ולכן $D_4/Z(D_4)$ אבלית ולכן $D_4'\leq Z(D_4)$. היות והחבורה לא אבלית, מתקיים $D_4'\neq\{id\}$ ולכן $D_4'=Z(D_4)$.

2. $(S_n)'=A_n$ עבור $n\geq 5$. הסבר: $A_n\leq S_n$ ולכן $(A_n)'\leq(S_n)'$ ולכן $A_n=(A_n)'\leq(S_n)'$. בנוסף, $A_n\triangleleft S_n$, $S_n/A_n\cong\mathbb{Z}_2$ אבלית ולכן $(S_n)'\leq A_n$. בסה"כ נקבל $(S_n)'=A_n$ [הסבר נוסף: עם פשטות].

<u>הערה</u>: טענה זו נכונה גם עבור $n=3,4$ אך משיקולים שונים. לגבי $n=3$ מתקיים $A_3 \triangleleft (S_3)'$ ומכיוון ש-S_3 אינה אבלית, נקבל הדרוש. לגבי $n=4$: נסו להוכיח זאת בבית (שימו לב, למשל, ש- $(234)=\left[(123),(24)\right]$).

<u>הגדרה</u>

<u>סדרת הקומטטור/ סדרת הנגזרת</u> של חבורה G היא הסדרה $G \geq G' \geq G'' \geq G''' \geq \ldots \geq G^{(n)} \geq \ldots$ המוגדרת באינדוקציה על-ידי $G^{(0)}=G\ ,G^{(1)}=G',\ldots,\ G^{(i+1)}=(G^{(i)})'$ ($G^{(n+1)}=\left[G^{(n)},G^{(n)}\right]$).

<u>הערה</u>: לכל $k\in\mathbb{N}$ מתקיים $G^{(k)} \triangleleft G^{(k-1)}$.

<u>משפט</u>

G היא חבורה פתירה אמ"מ קיים t סופי כך ש- $G^{(t)}=\{e\}$.

<u>לדוגמה</u>: $G=D_3,\ G^{(1)}=\langle\sigma\rangle,\ G^{(2)}=\{id\}$ ולכן D_3 פתירה.

<u>הערה</u>: כך אפשר גם לראות מדוע עבור $n\geq 5$ החבורה S_n אינה פתירה. שכן החל מ-$i=1$ מתקיים $(S_n)^{(i)}=A_n\neq\{id\}$.

<u>תרגיל</u>

תהא G חבורה מסדר 28. הוכיחו:

א. קיימת תת חבורה 7-סילו נורמלית;

ב. אם G לא אבלית אזי $|G'|=7$;

ג. אם G לא אבלית ויש לה תת חבורה נורמלית מסדר 2, אז $\left|G/Z(G)\right|=14$.

<u>פתרון</u>

א. $28=2^2\cdot 7$. לפי משפט סילו 3 מתקיים $n_7\equiv 1\pmod 7$ $\wedge$ $n_7\mid 4$ ולכן $n_7=1$ ויש תת חבורה 7-סילו Q שהיא נורמלית.

ב. $Q\lhd G$, $\left|G/Q\right|=4=2^2$ ולכן G/Q אבלית $\Leftarrow$ $G'\le Q$. G לא אבלית ולכן $G'\neq\{e\}$. כמו כן, $Q\cong\mathbb{Z}_7$ ולכן כל איבר חוץ מהיחידה הוא יוצר $\Leftarrow$ $G'=Q$ $\Leftarrow$ $|G'|=7$.

ג. $|Z(G)|\notin\{1,2,4,7,14\}$. ראינו את הטענה הבאה: אם $\left|G/Z(G)\right|>1$ אזי $G/Z(G)$ אינה ציקלית; לכן $|Z(G)|\neq 4,14$ (אחרת זה כן יוצא ציקלי).

כעת, נתון לנו שיש לחבורה תת חבורה נורמלית מסדר 2, וראיתם (ואם לא - קל להראות שוב) שתת חבורה כזאת נמצאת במרכז (כדאי מאוד להראות). לכן $|Z(G)|>1$ וכן $|Z(G)|\neq 7$ ומכאן $|Z(G)|=2$. מתקיים $\left|G/Z(G)\right|=14=2\cdot 7$ $\Leftarrow$.

מש"ל