# ב"א אלגברה לינארית תשעז מועד ב

1. משפט מההרצאה.
2. משפט מההרצאה.
3.

(א) מצאו את כל הפתרונות המרוכבים למשוואה $z = (\bar{z})^2$.

פתרון: נסמן $z = a + bi$ עבור $a, b \in \mathbb{R}$ ממשיים. ונסתכל על המשוואה מהשאלה

$$a + bi = \left(\overline{a + bi}\right)^2$$

או

$$a + bi = a^2 - b^2 - 2abi$$

ונשווה את החלק הממשי והחלק המדומה (בנפרד) לקבל את שתי המשוואות

$$\begin{cases} a &= a^2 - b^2 \\ b &= -2ab \end{cases}$$

עבור $b = 0$ (כלומר $z$ מספר ממשי..) נקבל

$$\begin{cases} a &= a^2 - b^2 \\ 0 &= 0 \end{cases}$$

שקל לפתור $a = 1, 0$ וקיבלנו ש $z = 1$ ו $z = 0$ אכן פתרונות למשוואה.

עבור $b \neq 0$ נוכל לחלק את המשוואההשניה ולקבל

$$\begin{cases} a &= a^2 - b^2 \\ 1 &= -2a \end{cases}$$

ואז מהמשוואה השניה לקבל ש $a = -\frac{1}{2}$ אשר נציב במשוואה הראשונה

$$b^2 = a^2 - a = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

שהפתרונות שלה הן

$$b = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

לסיכום, קיבלנו 4 פתרונות $0, 1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(ב) מצאו לאילו ערכי $k$ למערכת

$$\begin{cases} kx+y+z &= 1 \\ x+ky+z &= 1 \\ x+y+kz &= 1 \end{cases}$$

יש:

- פתרון יחיד.
- אין סוף פתרונות.
- אין פתרון.

פתרון: נעביר את מערכת המשוואות לייצוג במטריצה ונדרג אותה:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3-R_1]{R_2-kR_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & 1 \\ 0 & 1-k^2 & 1-k & 1-k \\ 0 & 1-k & k-1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & 1 \\ 0 & 1-k & k-1 & 0 \\ 0 & 1-k^2 & 1-k & 1-k \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-(k+1)R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & 1 \\ 0 & 1-k & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-k)-(k-1)(k+1) & 1-k \end{array}\right)$$

וכעת:

אם $0 \neq k - 1$ וגם $0 \neq [(k+1) + 1] (1-k) = (k+1)(k-1) - (1-k)$ נקבל שיש לנו צורה מדורגת, ללא שורת סתירה וללא משתנים חופשיים ולכן במקרה זה יהיה פתרון יחיד. נטפל במקרה ש $0 \neq k - 1$ או ש $(1-k)[1+(k+1)] = 0$: נשים לב ש שבמקרה זה נצרך לטפל בשני $k$ ים מסוימים - $k=1$ או $k=-2$.

- $k=1$ - נקבל את המערכת

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

שהיא בצורה מדורגת, ללא שורת סתירה ועם משתנים חופשיים $(z,y)$ ולכן במקרה זה יהיו אינסוף פתרונות.

- $k=-2$- נקבל את המערכת

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

שיש בה שורת סתירה ולכן במקרה זה לא יהיה פתרון.

4. נתונה מהמטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

(א) מצאו בסיס ומימד לתתי המרחבים: $C(A) \cap R(A)$ ו $N(A)$.

פתרון: נתחיל בדירוג המטריצה

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-R_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1+R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$N(A)\underbrace{=}^{z=t\ \text{(המשתנה החופשי)}}\left\{\begin{pmatrix}-2t\\-t\\t\end{pmatrix}\mid t\in\mathbb{R}\right\}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

ו $\left\{\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$ בסיס ל$N(A)$ ולכן $\dim N(A)=1$. בנוסף, השורות השונות מאפס בצורה מדורגת מהוות בסיס ל $R(A)$ ולכן

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

בסיס ל $R(A)$ ו $\dim R(A)=2$. ולסיום עמודות במטריצה $A$ שיש בהם איברים פותחים בצורה מדורגת - מהוות בסיס ל$C(A)$ ולכן (כיוון שיש איברים פותחים בעמודות 1 ו 2 בצורה מדורגת)

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

בסיס ל $C(A)$ ו $\dim C(A)=2$. כעת נמיר את $C(A),R(A)$ לייצוג כפתרון למערכת משוואות כך: עבור $R(A)$:

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&0&x\\0&1&y\\2&1&z\end{array}\right)\xrightarrow{R_3-2R_1}\left(\begin{array}{cc|c}1&0&x\\0&1&y\\0&1&z-2x\end{array}\right)\xrightarrow{R_3-R_2}\left(\begin{array}{cc|c}1&0&x\\0&1&y\\0&0&z-2x-y\end{array}\right)$$

ולכן

$$R(A)=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3\mid z-2x-y=0\right\}$$

ועבור $C(A)$:

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&-1&x\\0&1&y\\1&0&z\end{array}\right)\xrightarrow{R_3-R_1}\left(\begin{array}{cc|c}1&-1&x\\0&1&y\\0&1&z-x\end{array}\right)\xrightarrow{R_3-R_2}\left(\begin{array}{cc|c}1&-1&x\\0&1&y\\0&0&z-x-y\end{array}\right)$$

ולכן

$$C(A)=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3\mid z-x-y=0\right\}$$

וכעת

$$C(A)\cap R(A)=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3\mid \begin{array}{c}z-x-y=0\\z-2x-y=0\end{array}\right\}$$

נפתור את המערכת בעזרת ייצוג מטריצי

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2-2R_1} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1+R_2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$C(A)\cap R(A) = N\left(\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\right) \overbrace{=}^{z=t\ \text{(המשתנה החופשי)}} \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ t \\ t \end{pmatrix} \mid t\in\mathbb{R}\right\} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

ו $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ בסיס ל $C(A)\cap R(A)$ ומתקיים $\dim\left[C(A)\cap R(A)\right]=1$.

(ב) הסבירו **לפי סעיף א:** האם $A$ הפיכה?

פתרון: לא, כי $\text{rank}A=2$ (מימד מרחב השורות) ולכן $\text{rank}A\neq 3$ ולכן $A$ אינה הפיכה.

(ג) מצאו את מיהו המרחב הניצב $\left(\text{span}\left\{N(A), C(A)\cap R(A)\right\}\right)^{\perp}$.

פתרון: מתקיים כי

$$\text{span}\left\{N(A), C(A)\cap R(A)\right\} = \text{span}\left\{N(A)\right\} + \text{span}\left\{C(A)\cap R(A)\right\} = N(A) + \left[C(A)\cap R(A)\right] =$$

$$= \text{span}\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} + \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

ולכן

$$\left(\text{span}\left\{N(A), C(A)\cap R(A)\right\}\right)^{\perp} = \left(\text{span}\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right)^{\perp} = \left(\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right)^{\perp}$$

ואפשר למצוא אותו על ידי מציאת מרחב האפס של המטריצה הבאה (שכבר נמשיך לדרג אותה)

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1+R_2} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$\left(\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right)^{\perp} \overbrace{=}^{z=t\ \text{(המשתנה החופשי)}} \left\{\begin{pmatrix} t \\ -t \\ t \end{pmatrix} \mid t\in\mathbb{R}\right\} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

ו $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ בסיס למרחב הניצב ומימדו שווה 1.

5. יהא $B=\{v_1,\ldots,v_n\}$ בסיס של מרחב וקטורי $V$ מעל שדה $\mathbb{F}$.

(א) הוכיחו כי לכל וקטור $v\in V$ קיימת הצגה יחידה $v=\alpha_1v_1+\cdots+\alpha_nv_n$ (ז"א שיש ויש רק אופציה אחת לבחור את

הסקלרים $\alpha_1,\dots\alpha_n$ מהשדה).

פתרון: יהא $v\in V$. כיוון ש $B$ בסיס הוא בפרט פורש את $V$, כלומר $V=\mathrm{span}B$ ולכן קיימים סקלרים $\alpha_1,\dots\alpha_n$ כך ש $v=\alpha_1v_1+\dots+\alpha_nv_n$. נראה שהם יחידים: נניח שקיימים $\beta_1,\dots,\beta_n$ כך ש

$$v=\beta_1v_1+\dots+\beta_nv_n$$

ונראה כי $\alpha_1=\beta_1,\dots,\alpha_n=\beta_n$ (זה מראה על יחידות הסקלרים). אכן, כיוון ששני הצירופים שווים ל $v$ נקבל ש

$$\beta_1v_1+\dots+\beta_nv_n=\alpha_1v_1+\dots+\alpha_nv_n$$

ונעביר אגף ונוציא גורם משותף לקבל

$$\left(\alpha_1-\beta_1\right)v_1+\dots+\left(\alpha_n-\beta_n\right)v_n=0$$

ומכיון ש $B$ בסיס ובפרט בת"ל נקבל שכל מקדמי הצירוף הנ"ל שווים אפס, כלומר

$$\left(\alpha_1-\beta_1\right)=0,\dots,\left(\alpha_n-\beta_n\right)=0$$

נעביר אגף ונקבל

$$\alpha_1=\beta_1,\dots,\alpha_n=\beta_n$$

כפי שרצינו.

(ב) הוכיחו שגם $v_1-v_2,v_2,\dots,v_n$ הוא בסיס של $V$.

פתרון: נוכיח ישירות לפי הגדרה ש $v_1-v_2,v_2,\dots,v_n$ הוא בסיס של $V$:

- בת"ל: נניח צירוף לינארי שלהם שמתאפס, $\alpha_1\left(v_1-v_2\right)+\alpha_2v_2+\dots+\alpha_nv_n=0$, ונראה שכל המקדמים $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ שווים אפס. אכן, כיוון שיש פילוג, נקבל ש

$$\alpha_1v_1+\left(\alpha_2-\alpha_1\right)v_2+\alpha_3v_3+\dots+\alpha_nv_n=0$$

ומכיוון ש $v_1,\dots,v_n$ בת"ל וקיבלנו צירוף לינארי שלהם שמתאפס נסיק כי המקדמים שלו, שהם $\alpha_1,\alpha_2-\alpha_1,\alpha_3\dots,\alpha_n$, כולם שווים אפס ולכן גם $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\dots,\alpha_n$ ($\alpha_2=0$ נובע מכך ש $\alpha_1=0,\alpha_2-\alpha_2=0$) כפי שרצינו.

- פורשת את $V$: יהא $v\in V$ ונראה שקיימים מקדמים $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ כך ש $\alpha_1\left(v_1-v_2\right)+\alpha_2v_2+\dots+\alpha_nv_n=v$. אכן, כיוון ש $v_1,\dots,v_n$ פורשים את $v$ נקבל שקיימים $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ כך ש

$$\alpha_1v_1+\dots+\alpha_nv_n=v$$

נגדיר $\beta_1=\alpha_1,\beta_2=\alpha_2+\alpha_1,\beta_3=\alpha_3,\dots,\beta_n=\alpha_n$ ונשתמש בפילוג לקבל ש

$$\beta_1\left(v_1-v_2\right)+\beta_2v_2+\dots+\beta_nv_n=\beta_1v_1+\left(\beta_2-\beta_1\right)v_2+\beta_3v_3+\dots+\beta_nv_n=$$

$$\alpha_1v_1+\dots+\alpha_nv_n=v$$

כפי שרצינו.

.6

(א) הוכיחו כי לכל מרחב וקטורי $V$ מעל $\mathbb{F}$ עם מכפלה פנימית מתקיים כי $V^\perp = \{0\}$.
פתרון: נניח כי $v \in V^\perp$ אזי לכל $u \in V$ מתקיים $\langle v, u\rangle = 0$ ובפרט

$$\langle v, v\rangle = 0$$

ובגלל תכונת האי-שליליות של המכפלה הפנימית נסיק כי $v = 0$. כלומר $V^\perp \subseteq \{0\}$ ומכיוון שוקטור האפס מקיים $\langle 0, u\rangle = 0$ לכל $u \in V$ נקבל גם את ההכלה ההפוכה $\{0\} \subseteq V^\perp$ ובסה"כ נקבל שיוויון $V^\perp = \{0\}$ כפי שרצינו.

(ב) האם קיימת מטריצה $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ כך ש

$$R(A) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$$

וגם

$$C(A) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

אם כן, תנו דוגמה למטריצה כזאת. אם לא, הסבירו מדוע מטריצה כזאת לא קיימת.
פתרון: כן. זה אומר ש $\text{rank}A = 1$ ולכן נבנה את המטריצה ככה שהשורות ת"ל בשורה אחת והעמודות תלויות בעמודה אחת. נתחיל ב

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ * & -1 & * \\ * & 1 & * \end{pmatrix}$$

כך ש $R(A) \subseteq \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$ וגם $C(A) \subseteq \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$. נמשיך בכך שנדאג ש $\text{rank}A = 1$ ואז ההכלות לעיל יהיו שיוויות.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -0.5 & -1 & -1.5 \\ 0.5 & 1 & 1.5 \end{pmatrix}$$

וסיימנו.