מד"ר ליניאריות עם מקדמים קבועים

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y = b(x)$$

$a_0, a_1, ...a_n \in \mathbb{R}$(לא פונקציות של x היום!) "מקדמים קבועים"

$b(x) = 0$ מקרה הומוגני

$b(x) \neq 0$ לא הומוגני/אי הומוגני

כתבנו את זה גם בצורה $Ly = b(x)$, $L = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + ... + a_1 D + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i D^i$. אופרטור דיפרנציאלי לינארי עם מקדמים קבועים.

ראינו פעם שעברה שאדלמ"קים(אופרטורים דיפרנציאלים לינאריים עם מקדמים קבועים) מתחלפים. כתוצאה מכך:

למה 1

אם ל־i כלשהו $L_i y = 0$ אזי $L_1 L_2 ... L_d y = 0$.

למה 2

(א) הפתרון הכללי של $(a_1 D + a_0) y = 0$ $(a_1 \neq 0)$ הוא $y = Ce^{-\mathrm{a_0 x}/1}$ כאשר C קבוע חופשי.

(ב) אם למשוואה $a_2 m^2 + a_1 m + a_0 = 0$ יש שורשים מרוכבים צמודים $\alpha \pm i\beta$ אזי הפתרון הכללי של $\left(a_2 D^2 + a_1 D + a_0\right) y = 0$ הוא $y = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x\right)$, C_1, C_2 קבועים חופשיים.

(ג) אם למשווה $a_2 m^2 + a_1 m^2 + a_1 m + a_0 = 0$ יש שורש כפול α, אזי הפתרון הכללי של המשוואה $\left(a_2 D^2 + a_1 D + a_0\right) y = 0$ הוא $y = e^{\alpha x}\left(C_1 + C_2 x\right)$, C_1, C_2 קבועים חופשיים.

איך פותרים $a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$?($a_0, a_1, a_2$ קבועים חופשיים)

מסתכלים על <u>המשוואה המאפיינת</u> $a_2 m^2 + a_1 m + a_0 = 0$

- אם יש שורשים מרוכבים צמודים $\alpha \pm i\beta$, פתרון כללי $y = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x\right)$
- אם יש שורש ממשי כפול α, פתרון כללי $y = e^{\alpha x}\left(C_1 + C_2 x\right)$
- אם יש שורשים ממשיים שונים α, β, פתרון כללי $y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x}$

הוכחת הלמה(2)

(א) אם $y = e^{-\mathrm{a_0 x}/\mathrm{a_1}}$, $y' = -\frac{a_0}{a_1} e^{-\mathrm{a_0 x}/\mathrm{a_1}}$ ו־$a_1 y' + a_0 y = 0$, לכן y זה פותר את המשוואה $(a_1 D + a_0) y = 0$, והפתרון הכללי הוא $Ce^{-\mathrm{a_0 x}/\mathrm{a_1}}$.

(ב) עלינו להוכיח ש$e^{\alpha x}\cos\beta x$ ו$e^{\alpha x}\sin\beta x$ הם פתרונות של $a_2y''+a_1y'+a_0y=0$ כאשר $\alpha\pm i\beta$ הם שורשים של $a_2m^2+a_1m+a_0=0$.

$$y=e^{\alpha x}\cos\beta x$$

$$y'=\alpha e^{\alpha x}\cos\beta x-\beta e^{\alpha x}\sin\beta x$$

$$y''=\left(\alpha^2-\beta^2\right)e^{\alpha x}\cos\beta x-2\alpha\beta e^{\alpha x}\sin\beta x$$

$$a_2y''+a_1y'+a_0=\left(a_2\left(\alpha^2-\beta^2\right)+a_1\alpha+a_0\right)e^{\alpha x}\cos\beta x-\left(2\alpha\beta a_2+\beta a_1\right)e^{\alpha x}\sin\beta x$$

אבל $a_2\left(\alpha+i\beta\right)^2+a_1\left(\alpha+i\beta\right)+a_0=0$

$$\Rightarrow a_2\left(\alpha^2+2i\alpha\beta-\beta^2\right)+a_1\left(\alpha+i\beta\right)+a_0=0$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{c}a_2\left(\alpha^2-\beta^2\right)+a_1\alpha+a_0=0\\ 2\alpha\beta a_2+a_1\beta=0\end{array}\right.$$

(פיצלנו לחלק ממשי וחלק מדומה) ולכן הביטוי למעלה 0. עבור $y=e^{\alpha x}\sin\beta x$ ההוכחה דומה.

(ג) למשוואה $a_2m^2+a_1m+a_0=0$ יש שורש כפול α אם"ם $a_1^2=4a_0a_2$ ו$\alpha=-\dfrac{a_1}{2a_2}$. אם $y=e^{\alpha x}\left(C_1+C_2x\right)$:

$$y'=\alpha e^{\alpha x}\left(C_1+C_2x\right)+e^{\alpha x}C_2=e^{\alpha x}\left(C_1\alpha+C_2+C_2\alpha x\right)$$

$$y''=\alpha e^{\alpha x}\left(C_1\alpha+C_2+C_2\alpha x\right)+e^{\alpha x}C_2\alpha=e^{\alpha x}\left(C_1\alpha^2+2C_2\alpha+C_2\alpha^2x\right)$$

$$a_2y''+a_1y'+a_0y=e^{\alpha x}\left(\begin{array}{c}a_2\left[C_1\alpha^2+2C_2\alpha+C_2\alpha^2x\right]\\ +a_1\left[C_1\alpha+C_2+C_2\alpha x\right]+a_0\left[C_1+C_2x\right]\end{array}\right)$$

$$=e^{\alpha x}\left(C_2x\underbrace{\left(a_2\alpha^2+a_1\alpha+a_0\right)}_{\substack{=0\\ when\,\alpha\,root\,of\\ a_2m^2+a_1m+a_0=0}}+C_1\left(a_2\alpha^2+a_1\alpha+a_0\right)+C_2\underbrace{\left(2\alpha a_2+a_1\right)}_{\substack{=0\\ when\\ \alpha=-\frac{a_1}{2a_2}}}\right)$$

$\blacksquare$

למשוואה $Ly=0$ כאשר $L=a_nD^n+...+a_1D+a_0$ מסתכלים על המשוואה המאפיינת $a_nm^n+a_{n-1}m^{n-1}+...+a_1m+a_0=0$ ומפרקים את הפולינום בצד שמאל לגורמים לינאריים וריבועיים. אם כל הגורמים שונים זה מזה

$$\left[\begin{array}{c} a_n\left(m-\alpha_1\right)\left(m-\alpha_2\right)...\left(m-\alpha_r\right)\left(m^2+b_1m+C_1\right)...\left(m^2+b_sm+C_s\right) \\ r+2s=n \end{array}\right]$$

אם כל הגורמים שונים ניתן כבר עכשיו לרשום פתרון כללי:

$$g=C_1e^{\alpha_1x}+...+C_re^{\alpha_r}+e^{p_1x}\left(C_{r+1}\cos q_1x+C_{r+2}\sin q_1x\right)+...+e^{p_sx}\left(C_{n-1}\cos q_sx+C_n\sin q_sx\right)$$

מה אם יש גורמים כפולים?

למה 3

אם L אופרטור דיפרנציאלי לינארי עם מקדמים קבועים ו$Ly=0$, אזי $L^{t+1}\left(x^ty\right)=0, t=1,2,3,...$. כלומר: אם $Ly=0$ אזי $L^2y=L^2\left(xy\right)=0$ ו $L^3y=L^3\left(xy\right)=L^3\left(x^2y\right)=0$ וכו', ולכן אם יש גורם $(m-\alpha)$ המופיע פעמיים, בפתרון הכללי לא רק רושמים $C_1e^{\alpha x}$ אלא גם $C_2xe^{\alpha x}$. אם שלוש פעמים אז גם $C_3x^2e^{\alpha x}$ וכו'.

ואם יש גורים $m^2+\beta m+\gamma$ המופיע פעמיים(שורשים $p\pm iq$), לא רק רושמים $e^{px}\left(C_1\cos qx+C_2\sin qx\right)$ אלא גם $e^{px}\left(C_3x\cos x+C_4x\sin x\right)$, ואם שלוש פעמים אז גם $e^{px}\left(C_5x^2\cos qx+C_6x^2\sin qx\right)$

הוכחת למה 3

למת עזר: $\mathcal{L}$ אדלמ"ק, $\mathcal{L}\left(xy\right)=x\mathcal{L}y+\mathcal{L}'y$ כאשר, אם $L=\sum\limits_{i=0}^{n}a_iD^i$, $L'=\sum\limits_{i=1}^{n}ia_iD^{i-1}$

הוכחה: $\mathcal{L}\left(xy\right)=\sum\limits_{i=0}^{n}a_iD^i\left(xy\right)$. לפי חוק לייבניץ לנגזרת של כפל:

$$D\left(y_1y_2\right)=y_1y_2'+y_1'y_2$$

$$D^2\left(y_1y_2\right)=y_1y_2''+2y_1'y_2'+y_1''y_2$$

$$D^i\left(y_1y_2\right)=y_1D^iy_2+iDy_1D^{i-1}y_2+\binom{i}{2}D^2y_1D^{i-2}y_2+...+D^iy_1y_2=\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}D^jy_1D^{i-j}y_2$$

במקרה שלנו:

$$\mathcal{L}\left(xy\right)=\sum_{i=0}^{n}a_iD^i\left(xy\right)=\sum_{i=0}^{n}a_i\left(xD^iy+iD^{i-1}y\right)=x\mathcal{L}y+\mathcal{L}'y$$

■ למת עזר

הוכחת למה 3

ע"י אינדוקציה. נניח שנכון כאשר $t=T$ וננסה להוכיח עבור $t=T+1$.

$$L^{T+2}\left(x^{T+1}y\right)=L\cdot L^{T+1}\left(x\cdot x^{T}y\right)=L\cdot\left[xL^{T+1}+\left(L^{T+1}\right)'\left(x^{T}y\right)\right]$$

$$=\left(T+1\right)L'L^{T+1}\left(x^{T}y\right)=0$$

ע"י חילופיות של אדלמ"קים לפי הנחת ההאינדוקציה.

הטענה נכונה עבור $t=0$, ולכן נכונה לכל t ע"י אינדוקציה■

דוגמאות

1 $y'''+y=0$.

משוואה מאפיינת - $m^{3}+1=0$

$$\left(m+1\right)\left(m^{2}-m+1\right)=0$$

שורשים: $-1,\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

$$y=C_{1}e^{-x}+e^{\frac{1}{2}x}\left(C_{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

2 $y^{(7)}-2y^{(5)}+y'''=0$

משוואה מאפיינת $m^{7}-2m^{5}+m^{3}=0$

$$m^{3}\left(m^{4}-2m^{2}+1\right)=0$$

$$m^{3}\left(m^{2}-1\right)^{2}=0$$

$$m^{3}\left(m-1\right)^{2}\left(m+1\right)^{2}$$

נשים לב שאמנם יש לנו רק 3 שורשים, אבל זו משוואה מסדר שביע, ולכן היא צריכה 7 מקדמים חופשיים:

$$y=C_{1}+C_{2}x+C_{3}x^{2}+C_{4}e^{x}+C_{5}xe^{x}+C_{6}e^{-x}+C_{7}xe^{-x}$$

3 מצא אדלמ"ק המאפסת את $e^x + 7 + 3x\sin x$

איזה אופרטור מאפס את 7? נגזרת. כדי לאפס את e^x אנו צריכים את האופרטור $(D-1)$ איך נאפס את $3x\sin x$?

D^2+1 מאפס את $\sin x$, D^2 מאפס את x. לכן לפי הלמה כדי לאפס את $3x\sin x$ אנו צריכים את $\left(D^2+1\right)^2$.

כדי לאפס את הכל נכפיל את האופרטורים:

$$L = (D-1)\,D\left(D^2+1\right)^2$$

4

$$(1)\quad y'' + 2y' - 3y = e^{5x}$$

$$\left(D^2+2D-3\right)y = e^{5x}$$

$$(D+3)(D-1)\,y = e^{5x}$$

צד ימין מאופס ע"י $D-5$, ולכן

$$(2)\quad (D-5)(D+3)(D-1)\,y = 0$$

והפתרון מקבל צורה $y = C_1e^{5x} + C_2e^{-3x} + C_3e^x$

אבל שימו לב: יש כאן 3 קבועים חופשיים. פתרון של (1) הוא בהכרח פתרון של (2), אבל <u>לא הפוך</u>!

אנחנו יודעים שפתרון כללי של אי הומוג הוא פתרון פרטי בתוספת פתרון כללי של ההומוג. לכן C_2, C_3 באמת חופשיים, אבל את C_1 יש לקבוע. ולכן, נבדוק מתי C_1e^{5x} הוא פתרון פרטי.

$$y = C_1e^{5x}$$

$$y' = 5C_1e^{5x}$$

$$y'' = 25C_1e^{5x}$$

$$y'' + 2y' - 3y = 32C_1e^{5x}$$

לכן יש לקחת $C_1 = \dfrac{1}{32}$, ופתרון כללי של האי-הומוגנית הוא

$$y = \frac{1}{32}e^{5x} + C_2e^{-3x} + C_3e^x$$

5 $y'' + y = x^2 + 4$

$$\left(D^2+1\right)y = x^2+4$$

$$\Rightarrow D^3\left(D^2+1\right)y = 0$$

$$y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4\cos x + C_5\sin x$$

צריך לתאם את המקדמים שלא שייכים לחלק ההומוגני - כלומר את C_1, C_2, C_3:

$$y = C_1 + C_2x + C_3x^2$$

$$y' = C_2 + 2C_3x$$

$$y'' = 2C_3$$

$$y'' + y = (2C_3 + C_1) + C_2x + C_3x^2$$

רוצים x^2+4: לכן $\begin{array}{l} C_3 = 1 \\ C_2 = 0 \\ C_1 = 2 \end{array}$. פתרון כללי של האי-הומוג הוא

$$y = 2 + x^2 + C_4\cos x + C_5\sin x$$

6 $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x} + \cos x$

$$\left(D^2 - 4D + 4\right)y = 2e^{2x} + \cos x$$

$$(D-2)^2\,y = 2e^{2x} + \cos x$$

$2e^{2x}$ מאופס ע"י $(D-2)$, ו$\cos x$ מאופס ע"י $\left(D^2+1\right)$:

$$\left(D^2+1\right)(D-2)^3\,y = 0$$

$$y = \left(C_1 + C_2x + C_3x^2\right)e^{2x} + C_4\cos x + C_5\sin x$$

C_1, C_2 שייכים לפתרון ההומוגני, ולכן אלו קבועים חופשיים.

$$y_1 = C_3x^2e^{2x}$$

$$y_1' = C_3\left(2x^2e^{2x} + 2xe^{2x}\right)$$

$$y_1'' = C_3 \left(4x^2 e^{2x} + 8xe^{2x} + 2e^{2x}\right)$$

$$y_1'' - 4y_1' + 4y_1 = C_3 e^{2x} \left(4x^2 + 8x + 2 - 8x^2 - 8x + 4x^2\right) = 2C_3 e^{2x}$$

יש לקחת $C_3 = 1$.

באופן דומה מוצאים C_4, C_5