בדידה תרגול 4

20 ביולי 2020

1 קבוצות - המשך

1.1 קבוצת החזקה

תהי A קבוצה. קבוצת החזקה של A היא הקבוצה:

$$P(A) = \{X : X \subseteq A\}$$

דוג:

$$P(\{1,2,3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}\{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

הכלל שצריך לזכור בהקשר זה הוא:

$$X \in P(A) \iff X \subseteq A$$

תרגילים:

1. הוכיחו או הפריכו:

   (א) קיימת A כך ש- $A \cap P(A) = \emptyset$.

   (ב) קיימת A כך ש- $A \cap P(A) \neq \emptyset$.

   (ג) קיימת A סופית כך ש- $A \cap P(A) = P(A)$.

   פתרון: א. הוכחה: ניקח $A = \{1\}$, אז $P(A) = \{\emptyset, \{1\}\}$ ולכן $A \cap P(A) = \emptyset$.
   ב. הוכחה: ניקח $A = \{1, \{1\}\}$, ואז $\{1\} \in A$, כי כך בחרנו את A, ובנוסף $\{1\} \in P(A)$ כי $1 \in A$, ולכן $\{1\} \in A \cap P(A)$ ולכן החיתוך לא ריק.
   ג. הפרכה: לא תיתכן קבוצה סופית כזו, כי אם נסמן $|A| = n$ אז נקבל $|P(A)| = 2^n$, ולכן $|A \cap P(A)| \leq n$ ואילו $|P(A)| = 2^n$, ולכן אין שיוויון.

2. הוכיחו:

$$P(A\cup B)=P(A)\cup P(B) \iff A\subseteq B \vee B\subseteq A$$

$\Leftarrow$: אם $A\subseteq B$ אז $P(A\cup B)=P(B)$, ובנוסף, $P(A)\subseteq P(B)$ ולכן $P(A)\cup P(B)=P(B)$וקיבלנו שיוויון. בדומה עבור המקרה $B\subseteq A$.
$\Rightarrow$: באופן שקול נוכל להוכיח שאם $A\nsubseteq B\wedge B\nsubseteq A$ אז $P(A\cup B)\neq P(A)\cup P(B)$.
אכן, נניח $A\nsubseteq B\wedge B\nsubseteq A$, לכן יש $a\in A\setminus B, b\in B\setminus A$. $\{a,b\}\subseteq A\cup B$ ולכן $\{a,b\}\in P(A\cup B)$, אבל $\{a,b\}\nsubseteq A$ כי $b\notin A$, וכן $\{a,b\}\nsubseteq B$ כי $a\notin B$. ולכן $\{a,b\}\notin P(A)\cup P(B)$. מש"ל.

1.2 מכפלה קרטזית

זוג סדור (a,b) הוא זווג של איברים כאשר יש חשיבות לסדר. כלומר, מודגש כאן ש־ a שמאלי ו־b ימני (ייתכן גם $a=b$). תהיינה A,B קבוצות, המכפלה הקרטזית שלהם היא:

$$A\times B=\{(a,b)|a\in A\wedge b\in B\}$$

לדוגמא:

$$\{1,2\}\times\{1,\emptyset\}=\{(1,1),(1,\emptyset),(2,1),(2,\emptyset)\}$$

תרגילים:

1. הוכיחו או הפריכו: לכל קבוצות A,B,C,D מתקיים:
   (א) $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$
   (ב) $(A\times B)\cup(C\times D)=(A\cup C)\times(B\cup D)$
   פתרון: א. הוכחה:

$$(x,y)\in A\times(B\cap C) \iff x\in A\wedge(y\in B\cap C) \iff x\in A\wedge y\in B\wedge y\in C$$

ניזכר בכך ש־ $p\equiv p\wedge p$, ולכן נוכל להמשייך כדלהלן:

$$\iff (x\in A\wedge y\in B)\wedge(x\in A\wedge y\in C) \iff (x,y)\in A\times B\wedge(x,y)\in A\times C \iff (x,y)\in(A\times B)\cap(A\times C)$$

ב. "הוכחה":

$$(x,y)\in(A\times B)\cup(C\times D) \iff (x,y)\in A\times B\vee(x,y)\in C\times D \iff (x\in A\wedge y\in B)\vee(x\in C\wedge y\in D)$$

זה לא עובד... לכן נראה הפרכה: ניקח $A=B=[0,1], C=D=[1,2]$, ואז נשים לב שהנקודה $(1.5,0.5)\in(A\cup C)\times(B\cup D)\setminus(A\times B)\cup(C\times D)$.

2 יחסים

יחס S מקבוצה A לקבוצה B הוא ת"ק של $S \subseteq A \times B$. למשל: $S = \{(1,2)\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ הוא יחס מ$\mathbb{Z}$ ל־ $\mathbb{N}$. כמו כן, $\emptyset$ היא יחס בין כל שתי קבוצות. סימון: במקום לסמן $(a,b) \in S$ מסמנים הרבה פעמים aSb. הסימון נח במקרים כמו היחס $S \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ המוגדר לפי:

$$(a,b) \in S \iff a \leq b$$

שקול:

$$S = \{(a,b) : a \leq b\}$$

במקרה כזה יותר נח לקרוא ליחס $\leq$ (ולא סתם אות S), ואז במקום לרשום $(a,b) \in \leq$ נרשום $a \leq b$.

הגדרות: יחס $R \subseteq A \times A$ ייקרא:

- רפלקסיבי אם: $\forall a \in A : (a,a) \in R$.
- סימטרי אם $aRb \Rightarrow bRa$.
- אנטי־סימטרי אם: $aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b$, באופן שקול: $a \neq b \Rightarrow (a,b) \notin R \vee (b,a) \notin R$.
- טרנזיטיבי אם $aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$.

תרגילים:

1. עבור הקבוצה $A = \{1,2,3\}$ מצאו יחס מעל A (כלומר יחס מ־A לעצמה, ת"ק של $A \times A$) לכל אחת מהשורות בטבלה:

טרנזיטיבי	אנטי־סימטרי	סימטרי	רפלקסיבי	R
V	V	V	V	$I_{\{1,2,3\}} = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$
		V		$\{(1,2),(2,1)\}, \emptyset$
	V			$\{(1,1)\}, \emptyset$
V				$\{(1,2),(2,1),(1,1),(2,2)\}$
	V	V		$R \subseteq I_{\{1,2,3\}} \equiv R \in P(I_{\{1,2,3\}})$
V		V		$\{(1,2),(2,1),(1,1),(2,2)\}$
X		V	V	$\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,3),(2,1),(3,2)\}$
V		V	V	$\{(1,2),(2,1),(1,1),(2,2),(3,3)\}$
	X	X		$\{(1,2),(2,3),(2,1)\}$

2. הגדרה: לכל x ממשי נגדיר את הערך השלם התחתון שלו $\lfloor x \rfloor$ להיות המספר השלם הגדול ביותר a המקיים $a \leq x$. למשל: $\lfloor \pi \rfloor = 3, \lfloor -1.5 \rfloor = -2$. נגדיר יחס $S = \{(x, \lfloor x \rfloor)\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. האם הוא :

(א) רפלקסיבי: לא, כי למשל $(1.5,1.5)\notin S$ כי $\lfloor 1.5\rfloor = 1 \neq 1.5$.

(ב) סימטרי: לא כי $(1,1.5)\notin S \wedge (1.5,1)\in S$.

(ג) אנטי־סימטרי: נניח $aSb\wedge bSa$, לכן $\lfloor b\rfloor = a \wedge \lfloor a\rfloor = b$. בפרט, $a,b\in\mathbb{Z}$, ואז $b=\lfloor a\rfloor = a$.

(ד) טרנזיטיבי: נניח $aSb\wedge bSc$, לכן $\lfloor b\rfloor = c \wedge \lfloor a\rfloor = b$. מהעובדה $b=\lfloor a\rfloor$ אנחנו מקבלים: $b\in\mathbb{Z}$, ואז $b=\lfloor b\rfloor = c$, ואז מהעובדה ש־ aSb נקבל aSc כדרוש.