חורף תשע"ד

פונקציות מרוכבות למהנדסים

תרגיל כיתה 10: טור טיילור

1. מצאו את טור טיילור וחשבו את רדיוס ההתכנסות של

(א) $f(z) = z/(z^2+1)$ עבור $z_0 = 1+i$

נרשום $f = (1/(z+i) + 1/(z-i))/2$ ונחשב את טור טיילור של $g = 1/(z-a)$. הנגזרת ה n-ית (בדקו!) היא $g^{(n)} = (-1)^n n!/(z-a)^{n+1}$ ולכן הטור טיילור של g הוא

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z_0-a)^{n+1}}(z-z_0)^n,$$

ומכאן הטור טיילור של f סביב $z_0 = 1+i$ הינו

$$f = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z+i} + \frac{1}{z-i}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1+2i)^{n+1}}(z-1-i)^n + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1-i)^n\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{(1+2i)^{n+1}} + 1\right)(z-1-i)^n.$$

נחשב כעת את R כאשר $c_n = \frac{(-1)^n}{2}(1+\frac{1}{(1+2i)^{n+1}})$. נרשום $1+2i = \sqrt{5}e^{i\phi}$ כאשר $\phi = \arg(1+2i)$ ולכן $c_n = \frac{(-1)^n}{2}(1+5^{-(n+1)/2}e^{-i(n+1)\phi})$. נקבל כי לכל $n \geq 1$

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{5}\right) \leq \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{5^{(n+1)/2}}\right) \leq |c_n| \leq \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{5^{(n+1)/2}}\right) \leq 1,$$

ומכאן $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|} = 1$ ולכן $R = 1$. הטור טיילור מתכנס אפוא בעיגול $|z-1-i| < 1$.

ב) $f = e^{z^2}\int_0^z e^{-t^2}dt$ עבור $z_0 = 0$

תחילה נרשום את הטור טיילור של e^{z^2}, $e^{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n}/n!$. כעת נסמן $F(z) = \int_0^z e^{-t^2}dt$ ונשים לב כי $F(z)$ אנליטית ו $F'(z) = e^{-z^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}/n!$. על כן ניתן לבצע אינטגרציה איבר איבר על מנת לקבל את הטור טיילור של $F(z)$:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^z t^{2n}dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}z^{2n+1}.$$

על כן הטור טיילור של f נתון ע"י

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{n!(2n+1)}\right) = \sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2m+2n+1}}{m!n!(2n+1)}. \tag{1}$$

כעת, אם נסמן את רדיוס ההתכנסות של הטורים השמאלי והימני באגף שמאל של (1) ב R_1, R_2 בהתאמה, אזי רדיוס ההתכנסות של הטור כולו הינו $\min\{R_1, R_2\}$. נקבל במקרה זה $R_1 = R_2 = \infty$.