שאלה 1: **האם הווקטור** $\begin{pmatrix}10\\20\\5\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ **הוא צירוף לינארי של הווקטורים:** $\left\{\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\10\\4\end{pmatrix}\right\}$ **?**

תשובה: יש לבדוק האם קיימים סקלרים $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ כך ש: $\alpha\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}2\\10\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\20\\5\end{pmatrix}$ אבל זה

בעצם שקול לפתור את המערכת: $\left(\begin{array}{cc|c}1&2&10\\3&10&20\\1&4&5\end{array}\right)$ ולכן נדרג אותה ונקבל:

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&2&10\\3&10&20\\1&4&5\end{array}\right)\xrightarrow[R_3-R_1]{R_2-3R_1}\left(\begin{array}{cc|c}1&2&10\\0&4&-10\\0&2&-5\end{array}\right)\xrightarrow{R_2-2R_3}\left(\begin{array}{cc|c}1&2&10\\0&0&0\\0&2&-5\end{array}\right)\xrightarrow{R_1-R_3}\left(\begin{array}{cc|c}1&0&15\\0&0&0\\0&2&-5\end{array}\right)\xrightarrow{\frac{1}{2}R_3}\left(\begin{array}{cc|c}1&0&15\\0&0&0\\0&1&-2.5\end{array}\right)$$

כלומר קיבלנו שאכן קיים צ"ל שייתן לנו את מבוקשנו: $15\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}-2.5\begin{pmatrix}2\\10\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\20\\5\end{pmatrix}$.

יהי V מרחב וקטורי מעל F. הוכח או הפרך: $sp\{v_1,v_2\}=sp\{v_1+v_2,v_1-v_2\}$.

הוכחה. שימו לב: על מנת להוכיח שיוויון קבוצות אתם צריכים להראות הכלה הפוכה. כלומר לקחת איבר מקבוצה A ולהראות ששייך לקבוצה B וכן להיפך.
גם כאן נעשה זאת:

כיוון ראשון: יש להוכיח $sp\{v_1,v_2\}\supseteq sp\{v_1+v_2,v_1-v_2\}$.
נתון $v\in sp\{v_1+v_2,v_1-v_2\}$.
כלומר, קיימים סקלרים $\alpha,\beta\in F$ כך ש $v=\alpha(v_1+v_2)+\beta(v_1-v_2)$.

נפתח את הסוגריים ונקבל: $v=(\alpha+\beta)v_1+(\alpha-\beta)v_2$. כלומר בעצם קיבלנו שניתן להביע את הווקטור כצ"ל של הוקטורים v_1,v_2, ולכן בסה"כ קיבלנו: $sp\{v_1,v_2\}\supseteq sp\{v_1+v_2,v_1-v_2\}$.

כיוון שני: $sp\{v_1,v_2\}\subseteq sp\{v_1+v_2,v_1-v_2\}$.
נתון $v\in sp\{v_1,v_2\}$, קיימים סקלרים $\alpha,\beta\in F$ כך ש $v=\alpha v_1+\beta v_2$. אנחנו מחפשים סקלרים: $\gamma,\delta\in F$ כך ש: $\boxed{v=\alpha v_1+\beta v_2=\gamma(v_1+v_2)+\delta(v_1-v_2)}$ (*).

כלומר אם נפתח:
$$\alpha v_1+\beta v_2=\gamma v_1+\gamma v_2+\delta v_1-\delta v_2$$
$$\alpha v_1+\beta v_2=\underbrace{(\gamma+\delta)}_{\alpha}v_1+\underbrace{(\gamma-\delta)}_{\beta}v_2$$
ולכן אנחנו בעצם מחפשים: $\boxed{\begin{cases}\gamma+\delta=\alpha\\ \gamma-\delta=\beta\end{cases}}$ (**).

נעשה מספר פעולות: אם נחבר את המשוואות (**), נקבל: $2\gamma = \alpha + \beta$, ולכן $\gamma = \frac{\alpha + \beta}{2}$.

מצד שני אם נחסר את המשוואות (**), נקבל: $2\delta = \alpha - \beta$, כלומר $\delta = \frac{\alpha - \beta}{2}$.

נחזור למשוואה (*) בסה"כ קיבלנו,

$$\boxed{v = \alpha v_1 + \beta v_2 = \gamma(v_1 + v_2) + \delta(v_1 - v_2) = \underbrace{\frac{\alpha + \beta}{2}}_{\gamma}(v_1 + v_2) + \underbrace{\frac{\alpha - \beta}{2}}_{\delta}(v_1 - v_2)}.$$

המשמעות היא כי מצאנו שניתן להביע את הווקטור $\boxed{v = \alpha v_1 + \beta v_2}$ כצ"ל של הוקטורים $(v_1 + v_2), (v_1 - v_2)$ ולכן בסה"כ הוכחנו גם את $sp\{v_1, v_2\} \subseteq sp\{v_1 + v_2, v_1 - v_2\}$.

ובזה סיימנו.