תרגיל (מבחן):
(לבד)

$$f(x)=\begin{cases} ax+b & x\le 1 \\ 2x^2 & x>1 \end{cases}$$

מצא את כל המספרים a,b כך ש-
א). f רציפה בכל $\mathbb{R}$
ב). f גזירה בכל $\mathbb{R}$
ג). f גזירה פעמיים בכל $\mathbb{R}$.

פתרון:
נבדוק כל (כמובן מה קורה בתחומים ללא (דוגמא
אבר $x=1$: $1<x \cup x<1$

$x<1$: $f(x)=ax+b$

f רציפה וגזירה ∞ פעמים ב- $\mathbb{R}$
ולכן היא רציפה וגזירה ∞ פעמים ב $x<1$
כי היא פולינום, ובפרט היא גזירה פעמיים
ב $x<1$:

$f'(x)=a$
$f''(x)=0$

$x>1$: $f(x)=2x^2$

רציפה וגזירה ∞ פעמים ב $\mathbb{R}$
ובפרט רציפה וגזירה פעמ"ם ב $x>1$

$f'(x)=4x$
$f''(x)=4$

סה"כ הוכחנו ש- f רציפה וגזירה פעמיים
ב $x>1 \cup x<1$ לכל $a,b\in\mathbb{R}$

Scanned by CamScanner

נבדוק מה קורה בנקודת תפר $x=1$:

א. נבדוק <u>לפי ההגדרה</u> עבור אילו $a,b\in\mathbb{R}$
f רציפה ב $x=1$.

1. ברור ש- f מוגדרת ב $x=1$ ומתקיים
$f(1)=a+b$

2. נבדוק עבור אילו $a,b\in\mathbb{R}$ קיים הגבול

$$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = a+b$$

מאחר שהפונקציה היא מפוצלת ! $x=1$ היא נקודת תפר, (נחשב בנפרד) את הגבולות החד צדדיים ונבדוק עבור אילו $a,b\in\mathbb{R}$ הם שווים:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(ax+b) = a+b = f(1)$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(2x^2) = 2$$

לכן בשביל הרציפות נדרוש שוויון של הגבולות החד צדדיים, כלומר:

$$\boxed{a+b=2}$$

לכן ~~לכל~~ עבור $a,b\in\mathbb{R}$ שמקיימים את המשוואה
f תהיה רציפה ב $x=1$.

ב. נבדוק עבור אילו $a,b\in\mathbb{R}$ f תהיה גזירה
ב - $x=1$.

ידוע כי, בשביל להיות גזירה, f צריכה להיות רציפה, כלומר $a+b=2$.

~~[illegible]~~ נבדוק <u>לפי ההגדרה</u> עבור אילו $a,b\in\mathbb{R}$
f תהיה גזירה, כלומר עבור אילו $a,b\in\mathbb{R}$
קיים הגבול:

$$(*)\ \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

Scanned by CamScanner

מנתון שהפונקציה היא גזירה ! $x=1$

היא רציפה שם, ונחשב את הגבולות

החד צדד"ים של (*)

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{a(1+h)+b-(a+b)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0^-}\frac{a\cdot h}{h}=\lim_{h\to 0^-}a=a$$

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{2(1+h)^2-\overbrace{(a+b)}^{2}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2(1+2h+h^2)-2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{4h+2h^2}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}(4+h)=4$$

ולכן, כדי שהגבול (*) יהיה ד"ק,

נדרוש את שוויון של הגבולות החד צדד"ים:

$$\begin{cases}a=4\\ a+b=2\end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$b=-2$$

ס"ה"כ קיבלנו שכדי ש- f תהיה גזירה ב $x=1$

צריך שיתקיים: $a=4$, $b=-2$ ולכן:

$$f(x)=\begin{cases}4x-2 & x\leq 1\\ 2x^2 & x>1\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}4 & x\leq 1\\ 4x & x>1\end{cases}$$

Scanned by CamScanner

ג) נבדוק האם f גזירה פעמיים ב- $x=1$.

• בשביל כך מספיק לבדוק ש- f' גזירה ב $x=1$

כמו מקודם, ב $x=1$ נבדוק גזירות של f'

לפי הגדרה, כלומר נבדוק האם ד"ק

$$(**)\ \lim_{h\to 0} \frac{f'(1+h)-f'(1)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f'(1+h)-f'(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{4-4}{h} = 0$$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f'(1+h)-f'(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{4(1+h)-4}{h} = 4$$

קיבלנו שהגבולות החד צדדיים ד"מ

אבל לא שווים ולכן הגבול $(**)$ לא ד"ק

ולכן f לא גזירה פעמיים ב- $x=1$.

__לסיכום:__ עבור $a=4$ $b=-2$ f גזירה ורציפה בכל $\mathbb{R}$.

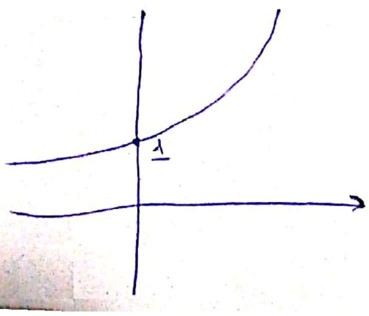
אין ערכים של a,b כדי ש- f תהיה גזירה פעמיים ב- $\mathbb{R}$.

__אחומי ללה וירוה__

אם f רציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה ב- (a,b) פרט אולי למספר סופי של נקודות מבודדות.

אם $f'(x)>0$ $(f'(x)<0)$ בכל נקודה של (a,b) פרט אולי למספר סופי של נק' מבודדות שבהן היא מתאפסת אזי f מונוטונית עולה (מונוטונית יורדת) ב- $[a,b]$

__לדוגמא:__ $f(x)=e^x$

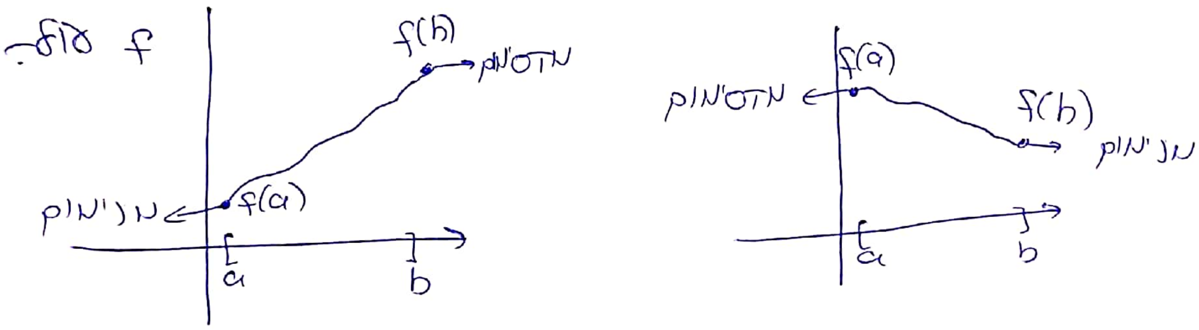


$\forall x\in\mathbb{R}: f'(x)=e^x>0$

ולכן f היא מונוטונית עולה ב- $\mathbb{R}$

Scanned by CamScanner

הערה: אם f היא מונוטונית עולה ב- $[a,b]$ אזי היא מקבלת את המינימום שלה ב- $x=a$ ואת המקסימום שלה ב- $x=b$.
ואם היא מונוטונית יורדת אזי היא מקבלת את המקסימום שלה ב $x=a$ ואת המינימום שלה ב $x=b$.
במילים אחרות, אם f היא מונוטונית (עולה או יורדת) אזי היא מקבלת את ~~[illegible]~~ הקיצון שלה בקצוות התחום (במובן הקיצון דו"ם).



תרגיל: הוכיחו שלכל $x>0$ מתקיים $e^x > x+1$

פתרון: באופן שקול, נצטרך להראות שלכל $0<x$:

$$e^x - x - 1 > 0$$

נגדיר פונקציה $f(x) = e^x - x - 1$
ונראה שהיא מונוטונית עולה לכל $0<x$ ולכן לפי ההערה מתקיים:

$$\forall x>0: \ f(x) > f(0) = e^0 - 0 - 1 = 0$$

$$\forall x>0: \ f'(x) = e^x - 1 > 0$$

$$\Downarrow$$

f היא מונוטונית עולה

$$\Downarrow$$

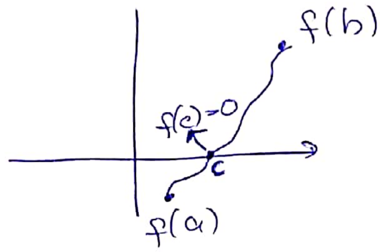
$$f(x) = e^x - x - 1 > 0$$

מש"ל.

Scanned by CamScanner

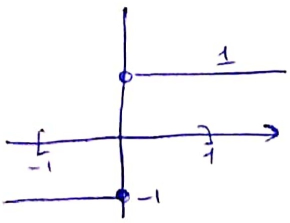
משפט ערך הביניים

יהי $f(x)$ **רציפה** בקטע $[a,b]$ ונניח ש-
$f(a)\cdot f(b)<0$, כלומר f מקבלת ערכים בעלי
סימנים מנוגדים בקצוות הקטע, אזי קיימת
(לפחות) $a<c<b$ כך ש $f(c)=0$



הערה חשובה!

שימו לב, המשפט לא נכון אם f לא
רציפה.
לדוגמא:



$$f(x)=\begin{cases} 1 & x>0 \\ -1 & x\le 0 \end{cases}$$

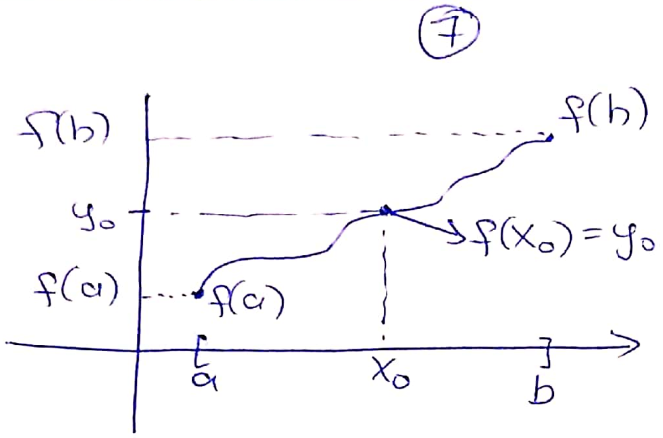
f מקבלת ערכים בעלי סימנים מנוגדים
בקצוות הקטע $[-1,1]$: $f(-1)=-1$, $f(1)=1$
אבל לא חותכת את ציר ה-x בכלל (דוגמה).

* ולכן אם רוצים להשתמש במשפט ע"ב
קודם כל בודקים רציפות.

משפט ערך הביניים המוכלל

יהי f **רציפה** ב- $[a,b]$ ויהי y_0 מספר
ממשי הנמצא בין $f(a)$ ל- $f(b)$ אזי קיימת
(לפחות) $a<x_0<b$ כך ש $f(x_0)=y_0$
במילים אחרות, f מקבלת את כל הערכים
בין $f(a)$ ל- $f(b)$.

Scanned by CamScanner



<u>תרגיל:</u> אם f רציפה ב-$[0,2]$ כך ש $f(2)=3$

הוכיחו שקיים נקודה $x_0 \in (0,2)$ כך ש

$$f(x_0)=\frac{1}{x_0}$$

<u>פתרון:</u> באופן שקול, נרצה להוכיח שקיים $0<x_0<2$

כך ש

$$f(x_0)\cdot x_0=1$$

(נגדיר פונקציה $g(x)=f(x)\cdot x$

ונוכיח באמצעות משפט ע"ב שהיא מקבלת

ערך 1 בנקודה $x_0 \in (0,2)$.

$g(x)$ היא רציפה כמכפלה של רציפות.

$$g(0)=f(0)\cdot 0=0$$

$$g(2)=f(2)\cdot 2=3\cdot 2=6$$

$$g(0)=0<1<6=g(2)$$

$$\Downarrow$$

לפי ע"ב $g(x)$ מקבלת ערך 1

בנקודה $0<x_0<2$, כלומר

$$g(x_0)=f(x_0)\cdot x_0=1$$

מש"ל.

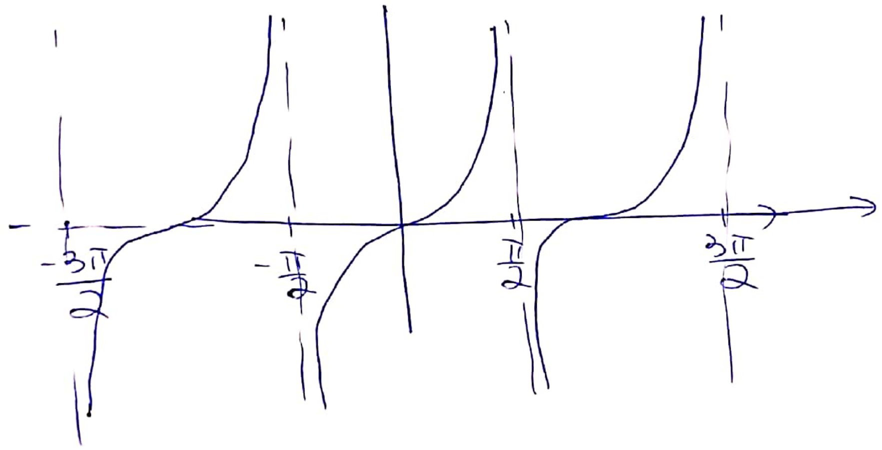
Scanned by CamScanner

<u>אתגר (ממסחן)</u>

הוכיחו כי קיימים ∞ מספרים $x\in\mathbb{R}$ כך ש $\tan(x)=x$.

<u>פתרון:</u> בכל קטע מהצורה $\left(\frac{\pi}{2}+\pi k, \frac{\pi}{2}+\pi(k+1)\right)$ $k\in\mathbb{Z}$

$\tan(x)$ רציפה ושואפת ל- ∞ כאשר מתקרבים לקצה הימני: $\frac{\pi}{2}+\pi(k+1)$ והיא שואפת ל $-\infty$ כאשר מתקרבים לקצה השמאלי $\frac{\pi}{2}+\pi k$



x חסומה בכל אחד מהקטעים האלה.

(נגדיר $g(x)=\tan(x)-x$

$$g(x)\xrightarrow[x\to\frac{\pi}{2}+\pi(k+1)]{}\infty$$

$$g(x)\xrightarrow[x\to\frac{\pi}{2}+\pi k]{}-\infty$$

$\Downarrow$

כאשר אנחנו קרובים מספיק ל $\frac{\pi}{2}+\pi(k+1)$ היא חיובית, והיא שלילית כאשר אנו מתקרבים ל- $\frac{\pi}{2}+\pi k$.

מכאן נובע שקיים $x_0\in\left(\frac{\pi}{2}+\pi k,\frac{\pi}{2}+\pi(k+1)\right)$ כך ש $g(x_0)>0$

וקיים $x_1\in\left(\frac{\pi}{2}+\pi k,\frac{\pi}{2}+\pi(k+1)\right)$ כך ש $g(x_1)<0$

Scanned by CamScanner

ולכן בקטע $[x_1, x_0] \subseteq (\frac{\pi}{2}+\pi k, \frac{\pi}{2}+\pi(k+1))$ $g(x)$ מקבלת

ערכים בעלי סימנים מנוגדים ובנוסף היא

רציפה בתור הרכבה של רציפות

$\Downarrow$

ד״מג $x_1<x_2<x_0$ כך ש

$g(x_2)=2$

לפי משפט ע״ב.

<u>לסיכום:</u> הוכחנו שבכל קטע מהצורה $(\frac{\pi}{2}+\pi k, \frac{\pi}{2}+\pi(k+1))$

$g(x)$ מתאפסת, אבל יש ∞ קטעים

כאלה כי לכל $k\in\mathbb{Z}$ יש קטע אחר

$\Downarrow$

$g(x)$ מתאפסת ∞

פעמים

$\Downarrow$

$$\tan(x)=x$$

עבור ∞ ערכים של $x\in\mathbb{R}$.

<u>אתגר (ממבחן)</u>

יהי f רציפה ולא בהכרח מונוטונית

הוכח/הפרך: אם f מונוטונית אזי

$$\forall x: f(x)\neq 0$$

<u>פתרון:</u> הפרכה.

$$f(x)=e^x-5$$

f רציפה ב-$\mathbb{R}$.

$$f(0)=-4<0$$
$$f(10)=e^{10}-5>0$$
$$\Downarrow$$

יש דוגמה $x_0\in(0,10)$ כך ש $f(x_0)=0$

Scanned by CamScanner