

בחינה בקורס **חשבון אינפיניטסימלי 2** (88-133-05/07) – מועד ב'

אוניברסיטת בר-אילן, יום ב, כ"ט אב תשע"ז (21.8.17)

מרצים: בועז צבאן, בוריס קוניאבסקי.

מתרגלים: ניקול בלשוב, רחל גרינפלד, אריאל וייצמן.

משך הבחינה: שעתיים וחצי.

אין להשתמש בחומר עזר כלשהו, פרט למחשבון פשוט.

הנחיות

א. יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות.

השתמש במחברת הבחינה לטיטה, ולאחר שמצאת פתרון מספק, כתוב אותו בצורה מסודרת **בגוף הבחינה**, במקום הפנוי המצוי לאחר השאלה.

אם מוכרחים, אפשר להמשיך תשובה בגב אותו דף. תשובה המשתרעת על יותר משני עמודים עלולה לקבל ניקוד חלקי.

ב. משקל כל שאלה הוא 24 נקודות. בשאלות עם יותר מסעיף אחד, הנקודות מתחלקות בשווה בין הסעיפים. 4 נקודות מוקצות עבור סדר ונקיון הבחינה.

ג. הקף בעיגול, בטבלה הבאה, את מספרי השאלות שעליהן ענית.

ארבע השאלות שבחרתי (להקיף בעיגול)	ניקוד (לשימוש הבודקים)
1	
2	
3	
4	
5	
סדר ונקיון	
סה"כ	

שאלות המבחן מופיעות בעמודים הבאים.

הבהרה. גם אם הדבר לא מצויין במפורש בשאלות, עליך לנמק את כל תשובותיך.

בהצלחה!

שאלה 1

הוכח את משפט הערך הממוצע האינטגרלי: יהיו f ו g פונקציות המוגדרות בקטע סגור $[a, b]$, כך שהפונקציה f רציפה בקטע, והפונקציה g אינטרגבילית בקטע ומקיימת $0 \leq g(x)$ לכל נקודה x בקטע. אזי יש נקודה c בקטע כך שמתקיים: $\int_a^b f(x)g(x) dx = f(c) \int_a^b g(x) dx$.

תשובה:

שאלה 2

יהי $n > 1$ מספר טבעי. נניח שהפונקציה f מוגדרת וגזירה n פעמים בסביבת הנקודה 0 , ומתקיים $f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0$ אך $f^{(n)}(0) = 5$. חשב את הגבול

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{(\sin 2x)^n}$$

בפתרוןך, מותר להשתמש בגבול הידוע $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$.

תשובה:

שאלה 3

נגדיר, לכל נקודה x בקטע $[-1, 1]$,

$$f(x) := \int_{-1}^x |t| dt$$

- א. בטא את הפונקציה $f(x)$ בצורה מפורשת (בלי סימן האינטגרל).
- ב. מצא את הנקודות בהן הפונקציה f רציפה.
- ג. מצא את הנקודות בהן הפונקציה f גזירה.

תשובה:

שאלה 4

לכל אחד מהאינטגרלים הבאים, בדוק האם הוא מתכנס, והאם הוא מתכנס בהחלט.

א. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x(\log x)^2} dx$

ב. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

ג. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3}{\sqrt{1+x^8}} dx$

תשובה:

שאלה 5

לכל מספר טבעי n , נגדיר פונקציה $f_n(x) := n^2 x e^{-n^2 x^2}$ שתחומה הוא הקרן $[0, \infty)$.
א. מצא את התחום A שבו סידרת הפונקציות מתכנסת, ואת הפונקציה f אליה הסידרה מתכנסת בתחום זה.

ב. האם ההתכנסות בתחום A היא במידה שווה?

ג. האם לכל נקודה x בתחום A מתקיים $\int_0^x f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^x f(t) dt$?

תשובה: