אנליזה מתקדמת למורים - תרגול 2

27 באוקטובר 2020

1 המשך לגבי חילוק, צמוד ונורמה

תרגיל: יהיו $z, w \in \mathbb{C}$ המקיימים: $|z| = |w| = 1, zw \neq 1$. הוכיחו ש-

$$Re\left(\frac{z+w}{1-zw}\right) = 0$$

כלומר, $\frac{z+w}{1-zw}$ הינו מדומה טהור.

הוכחה: נכפיל בצמוד:

$$\frac{z+w}{1-zw} = \frac{z+w}{1-zw} \cdot \frac{\overline{1-zw}}{\overline{1-zw}} = \frac{(z+w)(\overline{1-zw})}{|1-zw|^2} =$$

$$= \frac{(z+w)(1-\overline{z}\cdot\overline{w})}{|1-zw|^2} = \frac{z+w-\underbrace{z\cdot\overline{z}}_{=1}\cdot\overline{w}-\overline{z}\cdot\underbrace{w\cdot\overline{w}}_{=1}}{|1-zw|^2} =$$

$$= \frac{z-\overline{z}+w-\overline{w}}{|1-zw|^2} = \frac{2Im(z)i+2Im(w)i}{|1-zw|^2} = \underbrace{\frac{2Im(z)+2Im(w)}{|1-zw|^2}}_{\in\mathbb{R}} \cdot i$$

וכמובן $Re\left(\underbrace{\frac{2Im(z)+2Im(w)}{|1-zw|^2}}_{\in\mathbb{R}} \cdot i\right) = 0$.

2 הצגות למספר מרוכב

ראינו את ההצגה הקרטזית $z = a + bi$, ואמרנו שניתן לעבור להצגה פולרית $z = r\cos\theta + ir\sin\theta$ כאשר:

- $r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$

- $\tan\theta = \frac{b}{a}$

תרגילים:

1. הציגו את המספרים הבאים בצורה פולרית:

(א) $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$

פתרון: נחשב רדיוס וזוית:

$$r = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = 1$$

$$\tan\theta = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{6}$$

ולכן: $z = 1\text{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \text{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

(ב) $z = 2i$

פתרון: ראשית, מספר מדומה טהור נמצא על ציר ה־y, ולכן אם הוא חיובי אז הזוית היא $\theta = \frac{\pi}{2}$, ואם הוא שלילי אזז $\theta = \frac{3\pi}{2}$. אצלנו הוא חיובי. לגבי הרדיוס, ברור $r = 2$. בסה"כ:

$$z = 2\text{cis}\frac{\pi}{2}$$

(ג) $z = -2 + i$.

פתרון: נחשב רדיוס וזוית:

$$r = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

$$\tan\theta = \frac{1}{-2} \Rightarrow \theta = -0.464 + \pi k$$

כיון שהמספר ברביע השני צריך להוסיף π. לכן:

$$z = \sqrt{5}\text{cis}(2.68)$$

(ד) $z = -4$.

פתרון: המספר נממצא על ציר ה־x בחלק השלילי, לכן הזוית היא π. הרדיוס, קל לראות, $r = 4$, ולכן:

$$z = 4\text{cis}\pi$$

2. הציגו את המספרים הבאים בצורה קרטזית:

(א) $z = \text{cis}0$.

פתרון: $z = \cos 0 + i \sin 0 = 1 + 0i = 1$

(ב) $z = 5\text{cis}\frac{\pi}{8}$

פתרון: $z = 5(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}) = 5(0.924 + 0.382i) = \underbrace{4.619}_{a} + \underbrace{1.913}_{b}i$

3. יהי $z = r\text{cis}\theta$ מספר מרוכב. הציגו את $-z, \overline{z}$ בצורה פולרית בעזרת r, θ. כלומר, מצאו

פתרון: נתחיל מהצמוד. נציג את המספר בצורה קרטזית:

$$z = r\cos\theta + ir\sin\theta$$

ולכן:

$$\overline{z} = r\cos\theta - ir\sin\theta \neq r\text{cis}\theta$$

ברור שהרדיוס זהה. נשתמש בזהויות טריג':

$$\cos(-\theta) = \cos\theta, \sin(-\theta) = -\sin\theta$$

ולכן:

$$\overline{z} = r\text{cis}(-\theta)$$

עכשיו לגבי המינוס:

$$z = r\cos\theta + ir\sin\theta$$

$$-z = -r\cos\theta - ir\sin\theta$$

נשתמש בזהויות טריגו':

$$\cos(\pi+\theta) = -\cos\theta, \sin(\pi+\theta) = -\sin\theta$$

ולכן:

$$-z = r\text{cis}(\pi+\theta)$$