תרגול 14 – 88-112 אלגברה לינארית 1
סמסטר א' תשע"ו

ינואר 2016

1 מסקנות ממשפט הדרגה ואיזומורפיזמים בין מרחבים וקטוריים

מסקנה 1.1 (מסקנה ממשפט הדרגה). יהיו V ו-W מרחבים וקטוריים מעל אותו שדה $\mathbb{F}$, ותהי $T : V \to W$ העתקה לינארית ביניהם.

1. אם $\dim V < \dim W$, אזי T אינה על.
2. אם $\dim V > \dim W$, אזי T אינה חד-חד ערכית.
3. אם $\dim V = \dim W$, אזי T חד-חד ערכית אם ורק אם T על.

ניסוח שקול:

1. אם קיימת העתקה לינארית $T : V \to W$ שהיא על, אזי $\dim V \geq \dim W$.
2. אם קיימת העתקה לינארית $T : V \to W$ שהיא חד-חד ערכית, אזי $\dim V \leq \dim W$.

הערה 1.2. אם $\dim V < \dim W$, זה לא אומר שכל העתקה לינארית $T : V \to W$ היא חד-חד ערכית. כנ"ל במקרה השני.

הגדרה 1.3. העתקה לינארית $T : V \to W$ נקראת **איזומורפיזם**, אם היא חד-חד ערכית ועל. אם יש איזומורפיזם $T : V \to W$, אומרים ש-V ו-W **איזומורפיים**, ומסמנים $V \cong W$.

דוגמה 1.4. יהיו $V = \mathbb{R}_2[x]$ ו-$W = \mathbb{R}^3$. נראה כי $V \cong W$. נגדיר $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^3$ לפי

$$T\left(a + bx + cx^2\right) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

ודאו שזהו איזומורפיזם.

משפט 1.5. $W \cong V$ אם ורק אם $\dim V = \dim W$.

דוגמה 1.6. יש פונקציה חד-חד ערכית ועל $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, כי העוצמות של שתי הקבוצות הן א; אבל אין העתקה לינארית חד-חד ערכית ועל $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, כי $\dim \mathbb{R}^2 = 2 \neq 3 = \dim \mathbb{R}^3$.

תרגיל 1.7 (משפט הדרגה ההפוך). יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, ויהיו $U,W \leq V$ תת-מרחבים שלו. נניח ש-$\dim U + \dim W = \dim V$. אזי קיימת העתקה לינארית $T : V \to V$ כך ש-$\ker T = U$ ו-$\mathrm{Im} T = W$.

הוכחה. יהי $B_1 = \{u_1, \ldots, u_m\}$ בסיס של U. נשלים אותו לבסיס $B = \{u_1, \ldots, u_m, v_{m+1}, \ldots, v_n\}$ של V. לכן, $\dim W = n - m$. יהי $B_2 = \{w_1, \ldots, w_{n-m}\}$ בסיס של W. נגדיר העתקה לינארית $T : V \to V$ לפי

$$T(u_1) = \cdots = T(u_m) = 0$$

ולכל $m+1 \leq i \leq n$, $T(v_i) = w_{i-m}$. העתקה לינארית כזו קיימת, לפי משפט ההגדרה. נשים לב כי

$$\mathrm{Im} T = \mathrm{Span}(T(B)) = \mathrm{Span}\{0, \ldots, 0, w_1, \ldots, w_{n-m}\} = W$$

נרצה להוכיח כי $\ker T = U$. לפי ההגדרה,

$$B_1 = \{u_1, \ldots, u_m\} \subseteq \ker T \Rightarrow U = \mathrm{Span}(B_1) \subseteq \ker T$$

לפי משפט הדרגה,

$$\begin{aligned} \dim \ker T + \dim \mathrm{Im} T &= \dim V \\ \dim \ker T + \dim W &= \dim V \end{aligned}$$

מהנתון נקבל $\dim U = \dim \ker T$, אבל $U \subseteq \ker T$; לכן $U = \ker T$, כדרוש. □

2 תמורות

הגדרה 2.1. החבורה הסימטרית מדרגה n היא

$$S_n = \{\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\} | \sigma \text{ is bijective}\}$$

זהו אוסף כל ההעתקות החח"ע ועל מהקבוצה $\{1, 2, \ldots, n\}$ לעצמה, ובמילים אחרות – אוסף כל שינויי הסדר של המספרים $\{1, 2, \ldots, n\}$. כל איבר של S_n נקרא **תמורה**. כל תמורה $\sigma \in S_n$ אפשר לכתוב באופן הבא:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

דוגמה 2.2. למשל, התמורה $\sigma \in S_4$ המוגדרת לפי

$$\sigma(1) = 2, \sigma(2) = 4, \sigma(3) = 3, \sigma(4) = 1$$

היא $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

הערה 2.3. נשים לב כי $|S_n| = n!$. אכן, מספר האפשרויות לבחור את $\sigma(1)$ הוא n; אחר כך, מספר האפשרויות לבחור את $\sigma(2)$ הוא $n-1$; כך ממשיכים, עד שמספר האפשרויות לבחור את $\sigma(n)$ הוא 1 – האיבר האחרון שלא בחרנו. בסך הכל, $|S_n| = n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot 1 = n!$.

הגדרה 2.4. מחזור (או **עגיל**) ב-S_n הוא תמורה המציינת מעגל אחד של החלפות של מספרים שונים: $a_1 \mapsto a_2 \mapsto a_3 \mapsto \ldots \mapsto a_k \mapsto a_1$ (ושאר המספרים נשלחים לעצמם). כותבים את התמורה הזו בקיצור $(a_1\ a_2\ \ldots\ a_k)$. **האורך** של המחזור $(a_1\ a_2\ \ldots\ a_k)$ הוא k.

דוגמה 2.5. ב-S_5, המחזור $(4\ 5\ 2)$ מציין את התמורה $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&4&3&5&2\end{pmatrix}$.

הערה 2.6. אפשר להרכיב שתי תמורות, כמו הרכבת פונקציות בבדידה, ולקבל תמורה חדשה. בפירוט,

$$(\sigma\circ\tau)(i)=\sigma(\tau(m))$$

דוגמה 2.7. נניח $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&2&4&5&1\end{pmatrix}$, $\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&4&3&2&1\end{pmatrix}$, $\pi=(1\ 4\ 3)$. נחשב את $\sigma\tau$:

$$\sigma\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&5&4&2&3\end{pmatrix}$$

נחשב את $\pi\sigma\tau$:

$$\pi\sigma\tau=\pi\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&5&4&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&3&2&5&4\end{pmatrix}$$

משפט **2.8**. כל תמורה ניתנת לכתיבה באופן יחיד כהרכבת מחזורים זרים, כאשר הכוונה ב"מחזורים זרים" היא מחזורים שאין לאף זוג מהם איבר משותף.

דוגמה 2.9. נסתכל על התמורה הבאה ב-S_7: $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\4&7&3&1&5&2&6\end{pmatrix}$. כדי לכתוב אותה כמכפלת מחזורים זרים, לוקחים מספר, ומתחילים לעבור על המחזור המתחיל בו. למשל:

$$1\mapsto 4\mapsto 1$$

אז בכתיבה על ידי מחזורים יהיה לנו את המחזור $(1\ 4)$. כעת ממשיכים כך, ומתחילים ממספר אחר:

$$2\mapsto 7\mapsto 6\mapsto 2$$

אז נקבל את המחזור $(2\ 7\ 6)$ בכתיבה. נשים לב ששאר המספרים הולכים לעצמם, כלומר $3\mapsto 3$, $5\mapsto 5$, ולכן

$$\sigma=(1\ 4)(2\ 7\ 6)$$

שימו לב שאנו משמיטים מחזורים מאורך 1.

הגדרה 2.10. יהי σ מחזור מאורך k, אזי **הסימן** שלו הוא:

$$\operatorname{sgn}(\sigma)=(-1)^{k-1}$$

ועבור התמורות $\tau,\sigma\in S_n$ מתקיים:

$$\operatorname{sgn}(\sigma\tau)=\operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\tau)$$

תכונה זו מאפשרת לחשב את הסימן של כל תמורה ב-S_n.
נקרא לתמורה שסימנה 1 בשם **תמורה זוגית** ולתמורה שסימנה -1 בשם **תמורה אי זוגית**.

דוגמה 2.11. (נקודה חשובה ומאוד מבלבלת)

1. החילוף (35) הוא תמורה אי זוגית.
2. התמורה הריקה היא תמורה זוגית.
3. מחזור מאורך אי זוגי הוא תמורה זוגית.
4. התמורה $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\4&7&3&1&5&2&6\end{pmatrix}$ שראינו קודם היא אי-זוגית.

3 דטרמיננטות

הגדרה 3.1. תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה. **הדטרמיננטה** שלה מוגדרת להיות

$$\det\left(A\right) = \left|A\right| = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot a_{1,\sigma(1)} \cdot \dots \cdot a_{n,\sigma(n)} \in \mathbb{F}$$

דוגמה 3.2. אם $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{2\times 2}$, אזי

$$\det A = ad - bc$$

דוגמה 3.3. אם $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, אזי

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

דוגמה 3.4. אם $A = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, נחשב את $\det A$:

$$\det A = 8\cdot 2\cdot 3 - 8\cdot 1\cdot 3 - 1\cdot 2\cdot 1 - 8\cdot 0\cdot 0 + 8\cdot 0\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot 0 = 48 - 24 - 2 - 0 + 0 + 0 = 22$$

תרגיל 3.5. נניח שנתונה מטריצה משולשית עליונה

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{n\times n}$$

חשבו את $\det A$.

פתרון. תהי $\sigma \in S_n$. נראה שאם $\sigma \neq \mathrm{Id}$, אזי $a_{1\sigma(1)}\dots a_{n\sigma(n)} = 0$. הרעיון: נראה שיש איזשהו i שעבורו $\sigma\left(i\right) < i$, ואז $a_{i\sigma(i)} = 0$. נניח בשלילה שלכל i, $\sigma\left(i\right) \geq i$. נקבל $n \leq \sigma\left(n\right) \leq n$, ולכן $\sigma\left(n\right) = n$; אז $\sigma\left(n-1\right) \geq n-1$, וכן $\sigma\left(n-1\right) \neq \sigma\left(n\right) = n$, ולכן $\sigma\left(n-1\right) = n-1$. כך נקבל ש-$\sigma = \mathrm{Id}$, בסתירה.
לכן, אם $\sigma \neq \mathrm{Id}$, המחובר שהיא מגדירה בדטרמיננטה מתאפס. מכאן

$$\det A = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$$