תרגיל 5

.

1. יהיו $T_m,\dots T_1 : V \to V$ ה"ל. הוכיחו כי
ההרכבה $T_m \circ \dots \circ T_1$ הפיכה אמ"מ כל אחת הפיכה (כלומר, לכל $1 \leq i \leq m$ ה"ל T_iהפיכה)
פתרון: מתקיים:

לכל i T_i הפיכה אמ"מ לכל בסיס B מתקיים $[T_i]_B^B$ הפיכה (לכל i) אמ"מ [מכפלה של מטריצות הפיכה אמ"מ כל אחת מהמטריצות הפיכה. לינארית 1] לכל בסיס B מתקיים כי $[T_m \circ \dots \circ T_1]_B^B = \prod_{i=1}^{m} [T_i]_B^B$ הפיכה אמ"מ $T_m \circ \dots \circ T_1$ הפיכה

2.

(א) יהיו V, W שני תתי מרחבים מעל שדה $\mathbb{F}$ בעלי מימדים n, m בהתאמה. עוד יהיו E בסיס ל V, F בסיס ל W ותהא $T : V \to W$ ה"ל. תהא $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ מטריצה המקיימת

$$\forall v \in V : \left[Tv\right]_F = A\left[v\right]_E$$

הוכיחו כי $A = [T]_F^E$

פתרון: נסמן $E = \{v_1, \dots v_i\}$. לפי הגדרה לכל i מתקיים $[v_i]_E = e_i$ כאשר e_i הוא וקטור היחידה שכולו אפסים פרט לקורדינאטה ה i־ית בה ששווה ל 1. כעת מהנתון + הגדרות מתקיים לכל i

$$C_i\left([T]_F^E\right) = \left[Tv_i\right]_F = A\left[v_i\right]_E = Ae_i = C_i(A)$$

כלומר לכל i העמודה ה i של A ושל $[T]_F^E$ שוות ולכן המטריצות שוות.

(ב) תהא $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ מטריצה וה"ל $T : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ המוגדרת $Tv = Av$ (לכל $v \in \mathbb{F}^n$) האם בהכרח קיים בסיס E ל $\mathbb{F}^n$ ובסיס F ל $\mathbb{F}^m$ כך ש $[T]_F^E = A$? אם כן, מצאו/הוכיחו שקיים. אחרת, הוכיחו שלא קיים.
פתרון: כן! נסמן $S = \{e_1, \dots, e_n\}$ בסיס סטדנטרי ל $\mathbb{F}^n$ ו S' בסיס סטנדרטי ל $\mathbb{F}^m$ אזי לכל i

$$C_i\left([T]_{S'}^S\right) = \left[Te_i\right]_{S'} = \left[Ae_i\right]_{S'} = \left[C_i(A)\right]_{S'} = C_i(A)$$

כלומר לכל i העמודה ה i של A ושל $[T]_{S'}^S$ שוות ולכן המטריצות שוות.

3. נגדיר הע"ל

$$T : \mathbb{R}^{2\times 3} \to \mathbb{R}^2$$

ע"י

$$T(A) = C_1(A) + C_3(A)$$

לכל $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$. כאשר $C_i(A)$ פירושו העמודה ה i של A.

נגדיר $S = \{e_{1,1}, e_{1,2}, e_{1,3}, e_{2,1}, e_{2,2}, e_{2.3}\}$ להיות הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^{2\times 3}$

(כלומר $e_{i,j}$ היא המטריצה שיש בה 1 במקום ה־ i,j ואפסים בכל השאר.)

ו $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ בסיס ל$\mathbb{R}^2$. מצאו את המטריצה המייצגת $[T]_B^S$.

פתרון: נסמן $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ מתקיים

$$\begin{aligned}
Te_{1,1} &= T(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 \\
Te_{1,2} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0v_1 + 0v_2 \\
Te_{1,3} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 \\
Te_{2,1} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 \\
Te_{2,2} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0v_1 + 0v_2 \\
Te_{2,3} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2
\end{aligned}$$

ולכן

$$[T]_B^S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. יהי $B = \{v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ בסיס ל $\mathbb{R}^3$ ו $S = \{e_1, e_2, e_3\}$ הבסיס הסטנדרטי. תהי $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ המקיימת:

$$[T]_B^S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(א) מצאו את $[T]_S^S$.

פתרון: מתקיים לפי הגדרה (לכל i)

$$[Te_i]_B = [T]_B^S \, [e_i]_S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} e_i$$

ולכן

$$Te_1 = 1v_1 + 3v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Leftarrow \quad [Te_1]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$Te_1 = v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftarrow \quad [Te_2]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Te_1 = 2v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Leftarrow \quad [Te_3]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$[T]_S^S = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(ב) חשבו את $T\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

פתרון: מתקיים לפי הגדרה (לכל i

$$T\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \left[T\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_S = [T]_S^S \left[\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_s = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 23 \\ 6 \end{pmatrix}$$

בהצלחה!