

03.09.17

88-112 אלגברה לינארית 1 – קורס קיץ תשע"ז – מועד א'

מרצים: איתמר שטיין, ארז שיינר

מתרגלים: שירה גילת, תמר בר-און, עדי בן-צבי, אלעד עטייא

אורך המבחן: 3 שעות.

חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.

הוראות:

- יש לענות על כל 5 השאלות. סה"כ הניקוד המקסימלי 108 נק' (כל ציון מעל 100 יעוגל ל100).
- יש לענות על דפי הבחינה בלבד. ניתן להשתמש במחברת כטיוטה, אך המחברת לא תיבדק כלל.

ניקוד	שאלה
	1
	2
	3
	4
	5
	סה"כ

חלק א'

1. (16 נק') הוכיחו את משפט המימדים:

יהי V מרחב וקטורי נוצר סופית מעל שדה F , ויהיו $U, W \subseteq V$ תתי מרחב.

אזי $\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$

דף נוסף לשאלה מספר _____

2. (24 נק') תהי $A \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$, נסמן את הצורה המדורגת קנונית ב CF , ודרגה ב $rank$.

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

- א. ב $CF(A)$ יש שורת אפסים אם ורק אם ב $CF(A^2)$ יש שורת אפסים.
- ב. אם ב $CF(A)$ יש בדיוק שתי שורות אפסים אזי גם ב $CF(A^2)$ יש בדיוק שתי שורות אפסים.
- ג. אם $rank(A) > 2$ אזי $A^2 \neq 0$.
- ד. אם $rank(A) = 4$ אזי $rank(A^2) = 4$.

דף נוסף לשאלה מספר _____

3. (10 נק') יהי V מ"ו נוצר סופית, ותהי העתקה לינארית (אופרטור) $T: V \rightarrow V$
המקיימת $T \circ T = T$. כמו כן, קיים $v \in V$ עבורו $Tv \neq v$.
הוכיחו או הפריכו: קיים $0 \neq u \in V$ עבורו $Tu = 0$.

דף נוסף לשאלה מספר _____

חלק ב'

4. (30 נק') תהי מטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$

- א. מצאו לאילו ערכי a מתקיים כי $(1,1,a) \in C(A)$.
- ב. מצאו מטריצה B עבורה $R(A) = R(B)$ וגם $(1,1,1) \in C(B)$.
- ג. מצאו בסיס ומימד ל $C(A) \cap N(A)$.
- ד. תהיינה בנוסף מטריצות הפיכות P, Q כך ש $PAQ = \begin{pmatrix} b & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & b-1 \end{pmatrix}$

מצאו את b .

דף נוסף לשאלה מספר _____

דף נוסף לשאלה מספר _____

5. (28 נק') נתון כי המטריצה $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ אינה הפיכה.

א. הוכיחו כי $\begin{vmatrix} a & -b & 2c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d & e & f \\ 0 & 2b & -c \\ g & h & i \end{vmatrix}$.

נתון בנוסף כי $\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} = 1$. פתרו את הסעיפים הבאים:

ב. חשבו את $\text{rank}(A)$.

ג. הוכיחו כי לכל $t \neq i$ המטריצה $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & t \end{pmatrix}$ הפיכה.

דף נוסף לשאלה מספר _____

דף נוסף לשאלה מספר _____

דף נוסף לשאלה מספר _____