אלגברה ליניארית
תרגיל 4

1. האם העתקה f היא חח"ע, על ? אם f לא חח"ע, מצאו וקטורים שונים v_2, v_1 מתחום ההגדרה של f כך ש- $f(v_1) = f(v_2)$. אם f לא על, מצאו וקטור w מהטווח של f כך ש- $f^{-1}(w) = \varnothing$.
כאשר $f^{-1}(w) = \{v \mid f(v) = w\}$.

כדי לקבוע את התכונות (חח"ע, על) של העתקה $f(x) = Ax$ נסתכל על המערכת המשוואות $Ax = y$ ונדרג אותה. אז נסמן ב- r את הדרגה של המטריצה המדורגת שקיבלנו,
ב- q את מספר השורות שבהן אין איבר מוביל (כלומר, מספר שורות של אפסים),
וב- p את מספר העמודות שבהן אין איבר מוביל.

א) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\quad f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & y_1 \\ 4 & 5 & y_2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & y_1 \\ 0 & -1 & y_2 - 2y_1 \end{array}\right)$$

$q = 0, r = 2$. לכן f על. בנוסף $p = 0$. לכן f חח"ע.

ב) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ $\quad f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & y_1 \\ 1 & -1 & 2 & y_2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & y_1 \\ 0 & 1 & 2 & y_2 - y_1 \end{array}\right)$$

$q = 0, r = 2$. לכן f על. $p = 1$ ולכן f לא חח"ע. נמצא פתרונות של המערכת כאשר $y_1 = 0, y_2 = 0$. x_3 משתנה חופשי, $x_2 = -2x_3$, $x_1 = -4x_3$.

אם $x_3 = 0$, אז $f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. אם $x_3 = 1$, אז $f\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. כלומר $f\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

ג) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ $\quad f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & y_1 \\ -2 & -4 & 2 & y_2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 + 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & y_1 \\ 0 & 0 & 0 & y_2 + 2y_1 \end{array}\right)$$

$q = 1, r = 1$. לכן f לא על.

אם ניקח $y_1 = 0, y_2 = 1$ למערכת לא יהיו פתרונות. זאת אומרת $f^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \varnothing$.

$p = 2$ ולכן f לא חח"ע. נמצא פתרונות של המערכת כאשר $y_1 = 0, y_2 = 0$.
x_2, x_3 משתנים חופשיים, $x_1 = -2x_2 + x_3$.

אם $x_2=0,x_3=0$, אז $f\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$. אם $x_2=0,x_3=1$, אז $f\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

כלומר $f\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=f\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.

ד) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ $\quad f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\\-1&-1\\0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&3&y_1\\-1&-1&y_2\\0&-2&y_3\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\to R_2+R_1}\left(\begin{array}{cc|c}1&3&y_1\\0&2&y_2+y_1\\0&-2&y_3\end{array}\right)\xrightarrow{R_3\to R_3+R_2}\left(\begin{array}{cc|c}1&3&y_1\\0&2&y_2+y_1\\0&0&y_3+y_2+y_1\end{array}\right)$$

$q=1,r=2$. לכן f לא על.

אם ניקח $y_1=0,y_2=0,y_3=1$ למערכת לא יהיו פתרונות. זאת אומרת $f^{-1}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\varnothing$.

$p=0$ ולכן f חח"ע.

ה) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ $\quad f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-2&2&-2\\1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&y_1\\-2&2&-2&y_2\\1&0&-1&y_3\end{array}\right)\xrightarrow[R_3\to R_3-R_1]{R_2\to R_2+2R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&y_1\\0&0&0&y_2+2y_1\\0&1&-2&y_3-y_1\end{array}\right)\xrightarrow{R_3\leftrightarrow R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&y_1\\0&1&-2&y_3-y_1\\0&0&0&y_2+2y_1\end{array}\right)$$

$q=1,r=2$. לכן f לא על.

אם ניקח $y_1=0,y_2=1,y_3=0$ למערכת לא יהיו פתרונות. זאת אומרת $f^{-1}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\varnothing$.

$p=1$ ולכן f לא חח"ע. נמצא פתרונות של המערכת כאשר $y_1=0,y_2=0,y_3=0$.

x_3 משתנה חופשי, $x_2=2x_3$, $x_1=x_3$.

אם $x_3=0$, אז $f\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$. אם $x_3=1$, אז $f\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$. כלומר $f\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=f\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.