מבוא לטופולוגיה - תרגיל בית 3 - פתרון

1. <u>הגדרה</u>. (ידועה במקרים פרטיים מקורסים קודמים, למשל, לגבי פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$):

יהיו X,Y מרחבים מטריים. פונקציה f נקראת *רציפה במידה שווה* אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $x_1,x_2\in X$:

$$d_X(x_1,x_2)<\delta\Rightarrow d_Y\big(f(x_1),f(x_2)\big)<\varepsilon$$

יהיו X,Y מרחבים מטריים. <u>הוכיחו:</u>

א') פונקציה $f:X\to Y$ רציפה במידה שווה היא רציפה.

<u>הוכחה.</u>

נוכיח ש- f רציפה בכל נקודה. יהי $\varepsilon>0$ ו- $a\in X$.

אזי קיים $\delta>0$ כך שלכל $x,x_1\in X$:

$d_X(x,x_1)<\delta\Rightarrow d_Y\big(f(x),f(x_1)\big)<\varepsilon$.

בפרט, אם $x_1=a$ מתקיים:

לכל $x\in X$: $\big(d_X(x,a)<\delta\Rightarrow d_Y\big(f(x),f(a)\big)<\varepsilon\big)$

זאת אומרת, f רציפה ב- a לפי ההגדרה.הבחירה של a הייתה אקראית לכן (ההרצאות) f רציפה, מש"ל.

ב') אם X קומפקטי ופונקציה $f:X\to Y$ רציפה, היא רציפה במידה שווה.

<u>הוכחה</u>

יהי $\varepsilon>0$. נתבונן במשפחת תת קבוצות של X $\{U_y\}_{y\in Y}$ כאשר כל תת קבוצה U_y מוגדרת באופן הבא: $U_y=f^{-1}\left(B\left(y,\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)$.

כל U_y פתוחה כי f רציפה ו- $B\left(y,\frac{\varepsilon}{2}\right)$ פתוחה.

לכל $x\in X$: $f(x)\in B\left(f(x),\frac{\varepsilon}{2}\right)$ ולכן $x\in f^{-1}\left(B\left(f(x),\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)$.

זאת אומרת, $x\in U_{f(x)}$. מזה נובעש- $\{U_y\}_{y\in Y}$ - כיסוי פתוח של X.

מכיוון ש-X קומפקטי לכיסוי הזה יש מספר לבג $\delta>0$ (ההרצאות).

יהיו $x_1, x_2 \in X$ כך ש- $d_X(x_1, x_2) < \delta$. אזי $x_2 \in B(x_1, \delta)$. לפי הגדרתו של מספר לבג קיימת נקודה $y \in Y$ כך ש- $B(x_1, \delta) \subseteq U_y$ ולכן

$$B(x_1, \delta) \subseteq f^{-1}\left(B\left(y, \frac{\varepsilon}{2}\right)\right) \Rightarrow f(B(x_1, \delta)) \subseteq B\left(y, \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

מזה מקבלים: $f(x_1), f(x_2) \in B\left(y, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ ולפי אישוויון המשולש:

ו- $d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq d_Y(f(x_1), y)) + d_Y(y, f(x_2)) < \varepsilon$, מש"ל.

2. תהי x_n סדרה ב-$\mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ כך ש- $x_n \to x$.

<u>הוכיחו</u> שתת מרחב $\{x_n | n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ (עם מטריקה מושרה מ-$\mathbb{R}^n$) הוא מרחב מטרי קומפקטי.

<u>הוכחה:</u>

נסמן: $A \coloneqq \{x_n | n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$.

א) $x_n \to x$ ולכן קיים $N \in \mathbb{N}$ כך ש-

$$n \geq N \Rightarrow x_n \in B(x, 1)$$

אם נקח $r = \max\{d(x, x_1), \dots, d(x, x_{N-1}), 1\}$ אז נקבל:

$$A = \{x_n | n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\} \subseteq B(x, r)$$

לכן A חסומה.

ב) נוכיח עכשיו ש- A סגורה. ברור שמספיק להוכיח ש- A^c פתוחה, ז"אשכל נקודה ב-A^c פנימית.

תהי $b \in A^c$. נניח – בשלילה – שהיא אינה פנימית ב-A^c. כלומר כל סביבה של b חותכת A. נעיר ש- $r_0 = d(x, b) > 0$ כי $b \neq x$.

נבנה תת סדרה x_{n_i} של סדרה x_n באינדוקציה:

<u>בסיס האינדוקציה)</u> $B(b, \min\{r_0, 1\}) \cap A \neq \emptyset$, אזי קיים איבר x_{n_1} של הסדרה x_n כך ש- $d(x_{n_1}, b) < \min\{r_0, 1\}$ ולכן $(x_{n_1}, b) < 1$.

<u>צעד האינדוקציה)</u> אם ניבנו k איברי תת סדרה $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}$ שלכל $1 \leq i \leq k$ מתקיים $d(x_{n_i}, b) < \frac{1}{i}$, נתבונן בכדור

$$B\left(b, \min\{r_0, d(x_1, b), d(x_2, b), \dots, d(x_{n_k}, b), \frac{1}{k+1}\}\right)$$

לפי בחירת הרדיוס הכדור חותך A *אבל לא מכיל* n_k איברי הסדרה הראשונים ולא מכיל x. אזי קיים אינדקס n_{k+1} כך ש- $n_k < n_{k+1}$ ו- $d\left(x_{n_{k+1}}, b\right) < \frac{1}{k+1}$.
ברור ש- $d\left(x_{n_k}, b\right) \to 0 \Leftarrow x_{n_k} \to b$. אבל כתת סדרה של סדרה מתכנסת x_{n_k} אמורה להתכנס ל-a. כיוון ש- $a \neq b$ ריבלנו <u>סתירה</u>.
אזי A^c פתוחה ו-A סגורה, מש"ל.
מ-א) ו-ב) A תת קבוצה חסומה וסגורה ב-$\mathbb{R}^n$ ולפי משפט היינה-בורל A קומפקטית, מש"ל.

3. תהי X קבוצה ו- Σ אוסף תת קבוצות של X המקיים שלושה התנאים הבאים:

א) $X, \emptyset \in \Sigma$
ב) אם $\{F_\alpha\}_{\alpha \in I}$ משפחת תת קבוצות כך ש- $F_\alpha \in \Sigma$ לכל $\alpha \in I$ אז

$$\bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha \in \Sigma$$

ג) אם $F_1, \dots, F_n$ משפחה סופית של תת קבוצות כך ש- $F_i \in \Sigma$ לכל i $(1 \leq i \leq n)$ אז

$$\bigcup_{1 \leq i \leq n} F_i \in \Sigma$$

<u>הוכיחו</u> ש- אוסף תת קבוצות $\mathrm{T} = \{F^c | F \in \Sigma\}$ הוא טופולוגיה על X.
הוכחה. צריך לבדוק ש-
<u>הוכחה.</u>
<u>1)</u> מ א) נובע: $X = \emptyset^c \in T;\ \ \emptyset = X^c \in T$.
<u>2)</u> יהי $\{F_\alpha\}_{\alpha \in I}$ אוסף תת קבוצות של X כך ש- $X \supseteq F_\alpha \in \Sigma$ לכל $\alpha \in I$.
נסמן: $F \coloneqq \bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha$.
אזי מ-ב) וחוקי דה מורגן מקבלים $F \in \Sigma$ ו- :

$$\bigcup_{\alpha \in I} F_\alpha^c = \left(\bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha\right)^c = F^c \in T$$

3) יהיו $F_1, F_2, \dots, F_n \in \Sigma$. אם נסמן $F_0 \coloneqq \bigcup_{i=1}^{n} F_i$ אז מ-ג) וחוקי דה מורגן מקבלים $F_0 \in \Sigma$ ו-:

$$\bigcap_{i=1}^{n} F_i^c = \left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\right)^c = F_0^c \in T$$

הוכחנו ש-T מקיים שלושת האקסיומות של טופולוגיה, מש"ל.

4. (מההרצאה) יהי X מרחב טופולוגי.

א') יהיו $A \subseteq B \subseteq X$. <u>הוכיחו</u> שלהשרות טופולוגיה:
- ישירות מ-X ל-A או
- קודם להשרות טופולוגיה מ-X ל-B ולאחר מכן מ-B ל-A -

זה אותו דבר.

<u>הוכחה.</u>

<u>סימון:</u> נסמן טופולוגיה של מרחב טופולוגי Y ב-τ_Y.
אם $S \subseteq Y$ תת-מרחב טופולוגי של Y נסמן את הטופולוגיה המושרה מ-Y ל- S ב-τ_{S_Y}. אז לפי הסימון הזה <u>צריך להוכיח</u> ש- $\tau_{A_{B_X}} = \tau_{A_X}$.
בהשתמש בטענות של ההרצאה 3 מקבלים:

<u>$\subseteq$.</u>

$$U \in \tau_{A_{B_X}} \Rightarrow \exists V \in \tau_{B_X}: U = A \cap V$$
$$V \in \tau_{B_X} \Rightarrow \exists W \in \tau_X: V = B \cap W$$
$$U = A \cap B \cap W = A \cap W \Rightarrow U \in \tau_{A_X}$$

<u>$\supseteq$.</u>

$$U \in \tau_{A_X} \Rightarrow \exists W \in \tau_X: U = A \cap W = (A \cap B) \cap W$$
$$= A \cap (B \cap W)$$
$$B \cap W \in \tau_{B_X} \Rightarrow U = A \cap (B \cap W) \in \tau_{A_{B_X}}$$

ב') להראות שאם $F \subseteq A \subseteq X$ ו-F סגורה ב-X , אז F סגורה ב-A .
<u>פתרון.</u> מתורת הקבוצות:

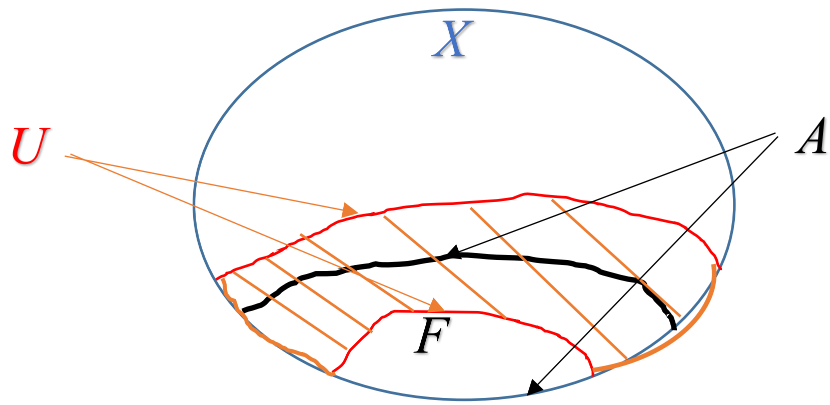
$$F^{c_A} = A - F = A \cap (X - F) = A \cap F^{c_X}$$

אבל F^{c_X} פתוחה ב-X ולכן F^{c_A} לפי הגדרת הטופולוגיה המושרה F^{c_A}

פתוחה ב-A ואז F סגורה ב-A , מש"ל.

ג') להראות שאם $X \subseteq A \subseteq F$ ו-F סגורה ב- A ו-A סגורה ב- X אז F סגורה ב-X .

<u>פתרון.</u>



$$F^c = (A - F) \cup A^c$$

מהתנאי $F - A$ פתוחה ב-A . לכן – לפי הגדרת הטופולוגיה המושרה - קיימת U פתוחה ב-X כך ש-

$$A - F = U \cap A$$

$$\Downarrow$$

$$F^c = (A - F) \cup A^c = (U \cap A) \cup A^c = (U \cup A^c) \cap (A \cup A^c)$$

$$\Downarrow$$

$$F^c = (U \cup A^c) \cap X = U \cup A^c$$

A^c פתוחה ב-X מהתנאי ו- U פתוחה ב-X , לכן F^c פתוחה ב-X ואז F סגורה ב-X , מש"ל.