

תרגול 3 – חזון"א 1 לביוולוגיה חישובית

נושא השיעור: סדרה מונוטונית, גבול סדרה, הגדרת הגבול ושיטות לחישוב.

הגדרה

סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ נקראת מונוטונית עולה אם קיים n_0 כך שלכל $n \geq n_0$, $a_n \leq a_{n+1}$. נאמר שהסדרה היא מונוטונית עולה ממש אם לכל $n \geq n_0$, $a_n < a_{n+1}$.
הסדרה היא מונוטונית יורדת אם קיים n_0 כך שלכל $n \geq n_0$, $a_n \geq a_{n+1}$. נאמר שהסדרה היא מונוטונית יורדת ממש אם לכל $n \geq n_0$, $a_n > a_{n+1}$.
נאמר שהסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא מונוטונית אם היא מונוטונית עולה או מונוטונית יורדת.

הערה

כדי להוכיח שסדרה מונוטונית עולה יש להראות ש קיים n_0 כך שלכל $n \geq n_0$, $a_{n+1} - a_n \geq 0$.

אם הסדרה חיובית אז יש להראות ש $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$.

באותו אופן ניתן להראות מונוטונית יורדת.

תרגיל

הוכח שהסדרה $n^2 + n$ עולה.

פתרון

$$a_{n+1} - a_n = (n+1)^2 + n + 1 - n^2 - n = 2n + 2 \geq 0$$

תרגיל

הוכח שהסדרה $\left\{ \frac{n!}{n^n} \right\}_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית יורדת.

פתרון

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^n < 1$$

תרגיל

הוכח שהסדרה $\frac{(n!)^2}{(2n)!} \cdot 4^n$ מונוטונית עולה.

פתרון

נשים לב ש

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{[(n+1)!]^2 \cdot 4^{n+1}}{(2(n+1))!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2 \cdot 4^n} = \frac{(n!)^2 \cdot (n+1)^2 \cdot 4^n \cdot 4 \cdot (2n)!}{(2n)! \cdot (2n+1) \cdot (2n+2) \cdot (n!)^2 \cdot 4^n} = \frac{4n+4}{4n+1} > 1$$

הערה

נניח שיש פונקציה גזירה $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ כך שלכל $x \in \mathbb{N}$ מתקיים $f(n) = f(x)$ וקיים n_0 כשלכל $x \geq n_0$ מתקיים $f'(x) \geq 0$ אז הסדרה מונוטונית עולה.

דוגמא

הוכח שהסדרה $a_n = \arctan n$ מונוטונית עולה.

הוכחה

ואז הסדרה מונוטונית עולה. $f(x) = \arctan x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ולכן $f'(x) \geq 0$

הגדרה

תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה נתונה. נאמר שהמספר L היא גבול של הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים מספר טבעי n_0 כל שלכל $n \geq n_0$ מתקיים $|a_n - L| < \varepsilon$.
אם לסדרה יש גבול אזי נאמר כי הסדרה מתכנסת ונסמן $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$.
אם לסדרה אין גבול אז נאמר שהסדרה מתבדרת.

תרגיל

הוכח לפי ההגדרה כי $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{(-1)^n}{n} \right] = 1$

פתרון

לכל $\varepsilon > 0$ נבחר $n_0 = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$ ואז לכל $n \geq n_0$ נקבל ש

$$|a_n - 1| = \left| 1 + \frac{(-1)^n}{n} - 1 \right| = \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} = \frac{1}{\left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1} < \frac{1}{\left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil} \leq \frac{1}{1/\varepsilon} = \varepsilon$$

משפט - אריתמטיקה של גבולות

יהיו $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ו $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרות מתכנסות ונניח ש $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$ אזי:

א. לכל קבוע c $\lim_{n \rightarrow \infty} c a_n = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = cA$

ב. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A + B$

ג. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = AB$

ד. אם בנוסף לנתונים הנ"ל, לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $b_n \neq 0, B \neq 0$ אזי $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{A}{B}$

דוגמא

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} = 1$$

שיטות לחישוב גבול

שיטה 1

סדרה מהצורה $a_n = \frac{p_t(n)}{p_k(n)}$ כאשר $p_k(n) = \sum_{i=1}^k c_i \cdot n^i, p_t(n) = \sum_{i=1}^t b_i \cdot n^i$

אם $t > k$ הסדרה מתבדרת.

אם $t < k$ הגבול הוא אפס.

אם $t = k$ הגבול הוא $\frac{b_k}{c_k}$.

דוגמאות

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^4 + 2n - 1}{2n^4 + n^3} \text{ מתקיים } t = k \text{ ולכן הגבול הוא } \frac{3}{2}.$$

$$\text{הסבר: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^4 + 2n - 1}{2n^4 + n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^4 + 2n - 1}{2n^4 + n^3} \cdot \frac{1/n^4}{1/n^4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{2}{n^3} - \frac{1}{n^4}}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{2}{n^3} - \frac{1}{n^4}\right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{3}{2}$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^4 + 2n - 1}{2n^2 + n} \text{ מתקיים } t > k \text{ ולכן הסדרה מתבדרת (או שקיים גבול במובן הרחב)}$$

$$\text{הסבר: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^4 + 2n - 1}{2n^2 + n} \cdot \frac{1/n^4}{1/n^4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{2}{n^3} - \frac{1}{n^4}}{\frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3}} = \infty$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n - 1}{2n^4 + n^3} \text{ מתקיים } t < k \text{ ולכן הגבול הוא אפס.}$$

$$\text{הסבר: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n - 1}{2n^4 + n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n - 1}{2n^4 + n^3} \cdot \frac{1/n}{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{n}}{2n^3 + n^2} = 0$$

שיטה 2

כאשר בהצגת האיבר הכללי של הסדרה יש ביטוי מהצורה $\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}$ אז החשב את הגבול של הביטוי הבא

$$\left(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}\right) \cdot \frac{\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}}{\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}} = \frac{a_n - b_n}{\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}}$$

חשוב לזכור:

א. השיטה לא תמיד מצליחה.

ב. השיטה טובה בד"כ עבור: $\infty - \infty$.

דוגמאות

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + 4n} - n\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + 4n} - n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + 4n} - n\right) \cdot \frac{\sqrt{n^2 + 4n} + n}{\sqrt{n^2 + 4n} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n}{\sqrt{n^2 + 4n} + n} = 2$$

שיטה 3

משפט

אם הסדרה $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה ואם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ אז הסדרה $\{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לאפס.

דוגמא

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos n}{\ln n}$ נסמן $b_n = \cos n$ ואז הסדרה $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה. נסמן $a_n = \frac{1}{\ln n}$ ואז מתקיים $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ולפי

$$\text{המשפט } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos n}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos n \cdot \frac{1}{\ln n} = 0$$

שיטה 4

משפט

תהיי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת מספרים חיוביים. אם קיים הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$ אזי הסדרה $\{\sqrt[n]{a_n}\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ומתקיים

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

דוגמא

חשב את גבול הסדרה $\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{((n)!)^2}}$

$$a_n = \frac{(2n)!}{((n)!)^2} \text{ ואז } a_{n-1} = \frac{(2(n-1))!}{((n-1)!)^2}$$

$$\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{((n)!)^2}} \text{ ולכן גבול הסדרה } \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{\frac{(2n)!}{((n)!)^2}}{\frac{(2(n-1))!}{((n-1)!)^2}} = \frac{(2n-2)! \cdot (2n-1) \cdot (2n)}{((n-1)!)^2 \cdot n^2} \cdot \frac{((n-1)!)^2}{(2(n-1))!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 4$$

הוא 4.

שיטה 5

משפט שטולץ

תהיי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה כלשהיא, ותהיי $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית עולה ממש ולא חסומה. אם קיים הגבול

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} \text{ אזי } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$$

דוגמא

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + \dots + (2n-1) \cdot (2n)}{n^3}$$

נסמן $b_n = 1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + \dots + (2n-1) \cdot (2n)$ ואז $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית עולה ממש ולא חסומה.

$$b_{n+1} - b_n = (2n+1) \cdot (2n+2) = 4n^2 + 6n + 2$$

נסמן $a_n = n^3$ ולכן $a_{n+1} - a_n = (n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$ כעת

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \frac{3n^2 + 3n + 1}{4n^2 + 6n + 2} = \frac{3}{4}$$

שיטה 5

שימוש בגבול $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ (ראיתם בהרצאה)

דוגמא

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n-2} \right)^{3n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-2}{n-2} + \frac{3}{n-2} \right)^{3n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{(n-2)/3} \right)^{3n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{(n-2)/3} \right)^{\frac{n-2}{3}} \right)^{3 \frac{(3n+2)}{n-2}} = e^9$$

הערה

לעיתים ניתן להראות שהגבול גם אם לא ניתן למצוא את הגבול עצמו.

משפט

כל סדרה מונוטונית וחסומה מתכנסת.

דוגמא

נוכיח שהסדרה $a_n = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$ מתכנסת.

הסדרה מונוטונית עולה מכיוון שכל איבר מתקבל ע"י הוספת מספר חיובי לאיבר הקודם לו. נשאר להוכיח שהסדרה חסומה.

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} \leq 1 - \frac{1}{n} < 1$$

ולכן מתכנסת.