אלגברה לינארית 2 | תש"ף מועד א'

פתרון המבחן | יונתן סמידוברסקי

שאלה 1

(סעיף א)

$$A=\begin{pmatrix} 10001 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 \\ 1 & 10003 & 5 & 7 & 9 & 11 \\ 1 & 3 & 10005 & 7 & 9 & 11 \\ 1 & 3 & 5 & 10007 & 9 & 11 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 10009 & 11 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 10011 \end{pmatrix}$$

יש למצוא את כל הערכים העצמיים של מטריצה A, נמצא את שורשי הפולינום האופייני,ניעזר בלפלס ובדירוג לפי עמודות\שורות.

$$p_A(x)=det(\begin{pmatrix} x-10001 & -3 & -5 & -7 & -9 & -11 \\ -1 & x-10003 & -5 & -7 & -9 & -11 \\ -1 & -3 & x-10005 & -7 & -9 & -11 \\ -1 & -3 & -5 & x-10007 & -9 & -11 \\ -1 & -3 & -5 & -7 & x-10009 & -11 \\ -1 & -3 & -5 & -7 & -9 & x-10011 \end{pmatrix})=^{C_5-3C_2}$$

$$=det(\begin{pmatrix} x-10001 & -3 & -5 & -7 & 0 & -11 \\ -1 & x-10003 & -5 & -7 & -3x+30000 & -11 \\ -1 & -3 & x-10005 & -7 & 0 & -11 \\ -1 & -3 & -5 & x-10007 & 0 & -11 \\ -1 & -3 & -5 & -7 & x-10000 & -11 \\ -1 & -3 & -5 & -7 & 0 & x-10011 \end{pmatrix})$$

$$=3(x-10000)\cdot det\begin{pmatrix} x-10001 & -3 & -5 & -7 & -11 \\ -1 & -3 & x-10005 & -7 & -11 \\ -1 & -3 & -5 & x-10007 & -11 \\ -1 & -3 & -5 & -7 & -11 \\ -1 & -3 & -5 & -7 & x-10011 \end{pmatrix}+$$

$$(x-10000)\cdot det\begin{pmatrix} x-10001 & -3 & -5 & -7 & -11 \\ -1 & x-10003 & -5 & -7 & -11 \\ -1 & -3 & x-10005 & -7 & -11 \\ -1 & -3 & -5 & x-10007 & -11 \\ -1 & -3 & -5 & -7 & x-10011 \end{pmatrix}$$

מכאן אין צורך להמשיך ולפתח.

משום שניתן לראות ש$10,000$ הוא ערך עצמי. (מהווה גורם משותף לשתי הדטרמיננטות), נמצא ריבוי גיאומטרי שלו

$$V_{10,000}=N\begin{pmatrix} -1 & -3 & -5 & -7 & -9 & -11 \\ -1 & -3 & -5 & -7 & -9 & -11 \\ -1 & -3 & -5 & -7 & -9 & -11 \\ -1 & -3 & -5 & -7 & -9 & -11 \\ -1 & -3 & -5 & -7 & -9 & -11 \\ -1 & -3 & -5 & -7 & -9 & -11 \end{pmatrix}=N\begin{pmatrix} -1 & -3 & -5 & -7 & -9 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

כלומר, ריבוי גיאומטרי הוא 5.

$.k_{\lambda_1}\geq 5 \Leftarrow m_{\lambda_1}=5$

אבל נשים לב שסכום כל השורות במטריצה A שווה ל$10,036$ כלומר אם נכפול את המטריצה A ב $v=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ נקבל

$$Av=A\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10,036\\10,036\\10,036\\10,036\\10,036\\10,036\end{pmatrix}=10,036\cdot v$$

סך הכל גם $10,036$ ערך עצמי ולכן,

$\lambda_1=10,000$ בעל ריבוי אלגברי 5 (אחרת לא יכול להיות ע"ע נוסף)

$\lambda_2=10,036$ בעל ריבוי אלגברי 1 (אחרת לא יכול להיות $k_{\lambda_1}\geq 5$)

וסכום הריבויים האלגברים שווה ל6 שזוהי מעלת הפולינום האופייני, ולכן מצאנו את כל שורשיו וסיימנו אפילו מבלי להמשיך לפתח את הדטרמיננטה.

שאלה 2

(סעיף א)

(פתרון מתגבור עם אריאל ויצמן)

יהי V ממ"פ מעל $\mathbb{C}$ ויהיו $a,b\in V$, ויהי $T:V\to V$ העתקה לינארית המוגדרת כך

$$Tv = <v,a>b$$

נמצא את T^* ממש לפי ההגדרה. לכל $u,v\in V$

$$<v,T^*u> = <Tv,u> = <<v,a>b,u> = <v,a>\cdot<b,u> = <v,\overline{<b,u>}\cdot a> = <v,<u,b>\cdot a>$$

כעת קיבלנו

$$<v,T^*u- <u,b>\cdot a>$$

לכל $u,v\in V$ בפרט ניקח $v=T^*u- <u,b>\cdot a$ ונקבל

$$<T^*u- <u,b>\cdot a, T^*u- <u,b>\cdot a> = 0$$

ומאי שליליות

$$T^*u- <u,b>\cdot a = 0$$

ולכן

$$T^*u = <u,b>\cdot a$$

שאלה 3

(סעיף א)

יהי V ממ"פ מעל $\mathbb{R}$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית.

ותהי $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. ויהי $T : V \to V$ אופרטור לינארי המוגדר כך $Tv = Av$

אפשר בקלות לחשב כי

$$C(A) = span\{b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\}$$

ומתקיים $C(A) \notin u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

אבל $Im(T) = C(A)$ (לוקחים בסיס סטנדרטי)

נרצה למצוא את הוקטור ב$Im(T)$ כלומר $C(A)$ הקרוב ביותר לu, כלומר ההיטל של u על $C(A)$

ראשית, נעשה גראם שמידט על $C(A)$ ונקבל

$$\{C(A) = span\{b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 29 \\ 51 \\ -22 \\ -1 \end{pmatrix}\}$$

$$\pi_{C(A)}(u) = \frac{< u, b_1 >}{||b_1||^2} b_1 + \frac{< u, b_2 >}{||b_2||^2} b_2 = \frac{< \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} >}{|| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} ||^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + \frac{< \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 29 \\ 51 \\ -22 \\ -1 \end{pmatrix} >}{|| \begin{pmatrix} 29 \\ 51 \\ -22 \\ -1 \end{pmatrix} ||^2} \cdot \begin{pmatrix} 29 \\ 51 \\ -22 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{9}{51} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + \frac{57}{3927} \cdot \begin{pmatrix} 29 \\ 51 \\ -22 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 46/77 \\ 57/77 \\ -1/7 \\ 94/77 \end{pmatrix}$$

סעיף ב)

יהי R מרחב העמודות של A^t, כלומר $R(A)$

מצא בסיס אורתונורמלי לR ול-$R^{\perp}$ (כלומר $N(A)$)

ראשית, הבסיס ל$R(A)$ הוא $\{v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$

נפעיל גראם שמידט על מנת להפוך את הבסיס לאורתוגנלי

$$w_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$w_2 = v_2 - \frac{< v_2, w_1 >}{||w_1||} \cdot w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}$$

כעת ננרמל

$$w_1 = \frac{w_1}{||w_1||} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$w_2' = \frac{w_2}{||w_2||} = \frac{\begin{pmatrix} -3/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}}{\sqrt{12/16}} = \begin{pmatrix} -3/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/6 \\ \sqrt{3}/6 \\ \sqrt{3}/6 \end{pmatrix}$$

כלומר הבסיס האורתונורמלי לR הוא $\{\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/6 \\ \sqrt{3}/6 \\ \sqrt{3}/6 \end{pmatrix}\}$

כעת הבסיס ל$N(A)$ הינו $\{v_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$

נפעיל גראם-שמידט

$$w_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w_2 = v_2 - \frac{< v_2, w_1 >}{||w_1||^2} \cdot w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{< \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} >}{|| \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ||^2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

כעת ננרמל

$$w_1' = \frac{w_1}{||w_1||} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w_2' = \frac{w_2}{||w_2||} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{1/2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{1/2} \\ -\sqrt{1/2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

כלומר הבסיס האורתונורמלי ל$R^{\perp}$הינו $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{1/2} \\ -\sqrt{1/2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

(סעיף ג)

$H = ker(T)$ וצריך להוכיח $H = R^{\perp}$

אבל זה נובע ממש מההגדרה (לוקחים בסיס סטנדרטי ואז $ker(T) = N(A) = R^{\perp}$

שאלה 4

הוכיחו/הפריכו :

(סעיף א)

בהינתן T אופרטור צמוד לעצמו אזי $T+iI$ אופרטור הפיך

הוכחה: ראינו בהרצאה שלכל אופרטור צמוד לעצמו מתקיים $\sigma(T)\subseteq\mathbb{R}$ נסמן $\sigma(T)=\{\lambda_1,...,\lambda_n\}$

וראינו שעבור $p(x)\in\mathbb{C}[x]$ מתקיים

$$\sigma(p(T))=\{p(\lambda_1),...,p(\lambda_n)\}$$

ניקח בפרט $p(x)=x+i$

ונקבל

$$\sigma(T+iI)=\{\lambda_1+i,...,\lambda_n+i\}\not\subseteq\mathbb{R}$$

כעת $\sigma(T)\subseteq\mathbb{R}$ ובפרט לכל $\lambda_i\neq -i$ לכל $1\leq i\leq n$ ולכן $\lambda_i+i\neq 0$. לכן $0\notin\sigma(T+iI)$ וממשפט היא הפיכה.

(סעיף ב)

אם A מטריצה הניתנת ללעסון וכל הע"ע שלה הם $1,-1$ אז מתקיים $A^2=I_n$

הוכחה אם A ניתנת ללכסון אזי קיימת D אלכסונית וP מלכסנת כך שמתקיים

$$P^{-1}AP=D$$

D אלכסונית מהצורה $\begin{pmatrix}\pm1&0&0&0&0&0\\0&\pm1&0&0&0&0\\0&0&\pm1&0&0&0\\.&.&&.&&\\.&.&&&.&\\.&.&&&&.\end{pmatrix}$ ובפרט מתקיים $D^2=I$

כעת

$$A=PDP^{-1}$$

ונעלה את שני הצדדים בריבוע

$$A^2=(PDP^{-1})\cdot(PDP^{-1})=PD^2P^{-1}=P\cdot I\cdot P^{-1}=PP^{-1}=I$$

(סעיף ג)

אם מטריצה $A \in \mathbb{C}^{n \cdot n}$ מקיימת $A + A^* = I + A^2$ אז A ניתנת ללכסון אוניטרי
הוכחה
מעל $\mathbb{C}$ כל פולינום מל"ל לכן צריך להוכיח כי A נורמלית לקבל לכסון אוניטרי.
נראה $AA^* = A^*A$, נראה שהן מתחלפות

$$A^* = A^2 - A + I$$

נכפול בA מימין ונקבל

$$AA^* = A^3 - A^2 + A$$

נכפול בA משמאל ונקבל

$$A^*A = A^3 - A^2 + A$$

וסיימנו.

שאלה 5

נתון שעבור $A \in \mathbb{R}^{3*3}$ מתקיים $\sigma(A) = \{-1, 0, 1\}$

(סעיף א)

A הפיכה- לא מתקיים לאף A

משום ש-0 ע"ע

ואז מתקיים

$$det(o \cdot I - a) = 0$$

וממשפט מלינארית 1

$det(A) = 0 \Leftarrow A$ לא הפיכה.

(סעיף ב)

A אורתוגונלית-לא מתקיים לאף A

כלומר מתבקש ש $AA^* = A^*A = I$

אבל הראינו שהיא לא הפיכה וסיימנו.

(סעיף ג)

$A = A^3$-מתקיים לכל A

בעצם יש לנו 3 ע"ע ולכן המטריצה לכסינה,

קיימת P הפיכה כך ש

$$D = P^{-1}AP$$

אבל $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ או $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ או $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ או $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ או $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ או $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

ובכל המקרים $D^3 = D$

לחילופין, אפשר לבחור מקרה אחד וכל השאר דומים לו מכיוון שמדובר בסך הכל בשינוי סדר העמודות בP

וכעת

$$PDP^{-1} = A$$

ניעזר בכך ש$D = D^3$

ונקבל

$$A^3 = (PDP^{-1})(PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^3P^{-1} = PDP^{-1} = A$$

וסיימנו.