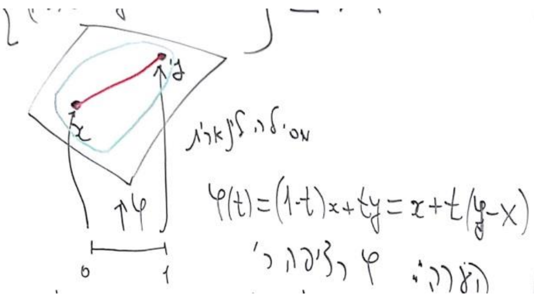


<u>תזכורת</u>: תת קבוצה X במ"נ $(E,\|\cdot\|)$ נקראת **קבוצה קמורה** $(convex)$ אם לכל $x,y\in X$ מתקיים $\{(1-t)x+ty: 0\le t\le 1\}\subseteq X$ (מסילה לינארית).

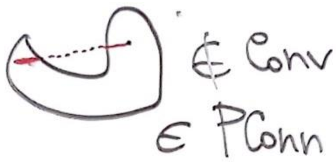
סימון: $X\in Conv$

הערה: φ רציפה כי – $\varphi\in Lip_{\|y-x\|}$.

טענה: $Conv\subset PConn$.

$$\boxed{Conv\subsetneq PConn\subsetneq Conn}$$

דוגמה:



הגדרה: $\mathbb{R}\supseteq X\neq\varnothing$ **קטע** אם לכל $a,b\in X$ מתקיים $[a,b]\subseteq X$.

<u>טענה</u>: נניח $X\subset\mathbb{R}$ תת מרחב. אזי התנאים הבאים שקולים:

1) X "קטע" (יתכן כמובן לא חסום)

2) $X\in Conv$

3) $X\in PConn$

4) $X\in Conn$

הסבר: $(1)\Leftarrow(2)$: לכל $a,b\in X$ מתקיים $[a,b]\subseteq X$. מצד שני $[a,b]=\{a+(b-a)t\mid 0\le t\le 1\}$.

$(2)\Rightarrow(3)\Rightarrow(4)$ נובע מהכלות ברורות $Conv\subseteq PConn\subseteq Conn$.

$(4)\Rightarrow(1)$

אם נניח שלא, אז X לא קטע, כלומר קיימים $a,b\in X$ כך ש $[a,b]\not\subset X$. ז"א קיימים $a<c<b$ כך ש $a,b\in X$ אבל $c\notin X$.

נגדיר $X_1\coloneqq(-\infty,c)\cap X, X_2\coloneqq(c,\infty)\cap X$

ואז נקבל ש $X=\underbrace{X_1}_{a\in}\sqcup\underbrace{X_2}_{b\in}$ פירוק טופולוגי.

ואז קיבלנו ש - $X \notin Conn$ בסתירה!

☺

<u>משפט</u> (ערך הביניים): נניח X מ"ט. אזי התנאים הבאים שקולים:

1) $X \in Conn$.

2) לכל פונקציה רציפה $X \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ יש תכונת ערך ביניים.

<u>הוכחה:</u>

$(1) \Rightarrow (2)$:

תמונה רציפה שומרת על $Conn$. לכן $Conn \ni f(X) \subset \mathbb{R}$ ואז מהטענה הקודמת נקבל ש - $f(X) \in \{\text{קטעים}\}$, ואז $f(X)$ בעל תכונת ערך הביניים.

$(2) \Rightarrow (1)$:

נניח בשלילה שלא. אז $X \notin Conn$. ז"א קיים פירוק טופולוגי $X = X_1 \sqcup X_2$

נגדיר פונקציה $X \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, אשר שולחת את X_1 ל – 0 ואת X_2 שולחת ל – 1.

X_1, X_2 פתוחות ב – X $\Leftarrow$ קל לבדוק (4 מקרים) שאכן מקור של קבוצה פתוחה גם קבוצה פתוחה, ואז f רציפה. אבל נקבל ש – $f(X) = \{0,1\}$.

וזאת לא מקיימת את תכונת ערך הביניים, בסתירה!

☺

דוגמאות של קבוצות קמורות:

1) כל מ"נ $(E, \|\cdot\|)$.

2) כדורים $B_r(a), B_r[a] \subset E$ בתוך מ"נ.

3) מלבנים, תיבות, אליפסואידים, ...

<u>משפט</u> (האלומות – תנאי מספיק לקשירות): נניח X מ"ט, $X = \bigcup_{j\in J} Y_j$ כך ש:

1) $\forall j \in J: Y_j \in Conn$

2) $\bigcap_{j\in J} Y_j \neq \emptyset$

אזי $X \in Conn$.

הוכחה: מתכונה (2) קיימת נקודה משותפת $z \in \bigcap_{j\in J} Y_j$.

נניח בשלילה ש – X פריק, אזי קיימות קבוצות זרות ופתוחות ולא ריקות X_1, X_2 כך ש –

$$X = X_1 \sqcup X_2$$

בה"כ $z \in X_1$ (ואז $z \notin X_2$).

מתקיים – $\forall j \in J: Y_j = (Y_j \cap X_1) \sqcup (Y_j \cap X_2)$

כעת נשים לב ש - $Y_j \cap X_1$ ו - $Y_j \cap X_2$ פתוחות וזרות בתת מרחב Y_j ו $z \in Y_j \cap X_1$.

אז $Y_j \cap X_2 = \emptyset$ לכל j, אחרת היינו מקבלים ש - $Y_j \notin Conn$ (פריק).

כעת – $X_2 = \bigcup_{j\in J}(X_2 \cap Y_j) = \emptyset$ בסתירה לפירוק של X.

☺

<u>תוצאות:</u>

1) נניח $X = Y_1 \cup Y_2$, כאשר $Y_1, Y_2 \in Conn$, $Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset$. אזי $X \in Conn$

(פשוט המשפט כאשר יש 2 אינדקסים).

2) **שרשור**

נניח $X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} Y_k$, כאשר $Y_k \in Conn$ לכל $k \in \mathbb{N}$ וכן –

$$\forall k \in \mathbb{N}: Y_k \cap Y_{k+1} \neq \emptyset$$

אזי $X \in Conn$.

הסבר: 1) מיידי מהמשפט!

2) נובע מ - (1) ואינדוקציה נובע מקרה של מס' סופי של הגורמים.

$$\forall k \in \mathbb{N}: A_k := Y_1 \cup Y_2 \cup \ldots \cup Y_k \in Conn$$

נשים לב – $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \cdots$

וברור – $A_1 \subseteq \bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k \neq \emptyset$

לכן לפי משפט האלומות נקבל ש – $X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \in Conn$.

☺

<u>הערה</u> (מרכיבי קשירות): במ"ט X נגדיר את היחס הבא –

$x \equiv y \overset{def}{=}$ אם "אפשר לחבר x ל – y ע"י קבוצה קשירה". זאת אומרת, קיימת –

$$Conn \ni A_{x,y} \subset X$$

כך ש – $\{x, y\} \subset A$

טענה: היחס הנ"ל הוא יחס שקילות.

הסבר:

1) $x \equiv x$, $A_{x,x} = \{x\}$.

2) $x \equiv y \Rightarrow y \equiv x$, $A_{y,x} \coloneqq A_{x,y}$.

3) צ"ל – $\begin{cases} x \equiv y \\ y \equiv z \end{cases} \Rightarrow x \equiv z$

$$A_{x,z} \coloneqq A_{x,y} \cup A_{y,z}$$

ואכן $y \in A_{x,y}$ וגם $y \in A_{y,z}$ ואז מתוצאה 1 (שירשור) נקבל ש - $A_{x,z} \in Conn$.

<u>**הגדרה:**</u> **מרכיב קשירות** של נק x ב X הוא $[x] \coloneqq \{y \in X | x \equiv y\}$ "מחלקה של x".

נשים לב כי – $X = \bigcup_{x \in X}[x]$.

תכונות:

- $X = \bigcup_{x \in X}[x]$ (יש חזרות! $[x] = [y] \Leftrightarrow x \equiv y$).
- מס' (עוצמה) של מרכיבי קשירות נשמר ע"י הומיאומורפיזמים.

<u>**תרגיל**</u>: הוכיחו ש T לא הומיאומורפי ל L (sans serif font).

הסבר: במרחב T יש נקודה z כך שלתת מרחב $\mathsf{T} \setminus \{z\}$ יש 3 מרכיבי קשירות.

אבל לכל $a \in \mathsf{L}$ לתת מרחב $\mathsf{L} \setminus \{a\}$ יש לכל היותר 2 מרכיבי קשירות.

- X קשיר $\Leftrightarrow$ יש מרכיב קשירות 1 בלבד.

  רמז: משפט האלומות.

- $[x] \in Conn$
- $[x] = \bigcup\{A \subseteq X | x \in A, A \in Conn\}$

ז"א $[x]=$ תת קבוצה קשירה הגדולה ביותר המכילה את x.

- $[x]$ סגור ב – X.

רמז: תוכיחו קודם את התרגיל הבא (ואז תשתמשו בתכונה הקודמת):

<u>**תרגיל:**</u> נניח $X = \bar{Y}$ (ז"א Y צפופה ב – X). אם $Y \in Conn$ אז גם $X \in Conn$.

דוגמה: תארו מרכיבי קשירות של:

א. $X=(0,2)\cup(2,5)\cup\{7\}$

תשובה: $[1]=(0,2),[3]=(2,5),[7]=\{7\}$

ב. $X=\{1,2,3,4\}\times\mathbb{R}$

תשובה: $\{1\}\times\mathbb{R},\{2\}\times\mathbb{R},\{3\}\times\mathbb{R},\{4\}\times\mathbb{R}$.

הגדרה: מ"ט X נקרא **"לא קשיר לחלוטין"** $(totally\ disconnected)$ אם $[x]=\{x\}$ לכל $x\in X$ (**רק** נקודון תת קבוצה קשירה).

דוגמאות:

1) מרחבים דיסקרטיים.

2) $\mathbb{Q}$

3) $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$

4) * $(\mathbb{Z},d_p)$

(רמז: לכל $a\in(\mathbb{Z},d_p)$ ו $b\neq a$ קיימת סביבה סגוחה $U\in N(a)$ כך ש $b\notin U$)

5) * $(\mathbb{R},\tau_s)$ (Sorgenfrey Line) כאשר בקבוצה $\mathbb{R}$ מוגדרת טופולוגיה הבאה

$$\tau_s:=\{O\subseteq\mathbb{R}:x\in O\Rightarrow\exists\varepsilon>0\,[x,x+\varepsilon)\subseteq O\}$$

<u>הגדרה:</u> (**מרכיב קשירות מסילתי**)**:** לכל מ"ט X ונקודה $x\in X$ מרכיב קשירות $[\mathrm{x}]_p$ של x מוגדר כמחלקת שקילות של x לגבי יחס שקילות הבא:

$$x\equiv_P y\ \overset{def}{=}\ \text{קיימת ב}X\text{ מסילה מ}-x\text{ ל}-y$$

טענה: $\equiv_P$ יחס שקילות.

הסבר:

1) צ"ל $- x\equiv_P x$. ניקח מסילה קבועה.

2) צ"ל $- x\equiv_P y\Leftarrow y\equiv_P x$. עבור מסילה $- f:[0,1]\to X$

נגדיר "מסילה הפוכה" – $f^*(t) = f(1-t) \quad f^*: [0,1] \to X$

3) צ"ל – $\begin{cases} x \equiv_P y \\ y \equiv_P z \end{cases} \Leftarrow x \equiv_P z$

עבור – $\begin{cases} f_1(0) = x, f_1(1) = y \\ f_2(0) = y, f_2(1) = z \end{cases}$

נגדיר $f_3: [0,1] \to X$ כך ש – $f_3(t) = \begin{cases} f_1(2t), \; 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ f_2(2t-1), \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$

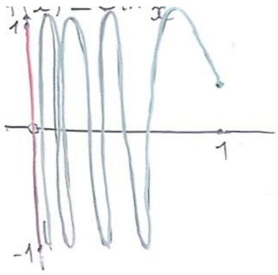
$$f_3(0) = x, f_3(1) = z$$

ונקבל ש - f_3 רציפה מהתרגיל הבא:

תרגיל: נניח $X = Y_1 \cup Y_2$, Y_1, Y_2 סגורות.

נתונה פונקציה $Z \xrightarrow{f} X$ כך ש הצמצומים $f\big|_{Y_1}: Y_1 \to Z$, $f\big|_{Y_2}: Y_2 \to Z$ רציפות.

אז f רציפה (* תנו דוגמה נגדית אם אין סגירות!).



<u>**הערה:**</u> $PConn \neq Conn$

נגדיר פונקציה $[-1,1] \xrightarrow{f} (0,1]$, $f(x) = \sin\frac{1}{x}$.

נגדיר – $X \coloneqq (\{0\} \times [-1,1]) \cup Gr(f)$

$$(0,1] \simeq Gr(f) \coloneqq \left\{ \left(x, \sin\frac{1}{x}\right) \in \mathbb{R}^2 \middle| 0 < x \le 1 \right\}$$

כעת, $Gr(f) \simeq (0,1]$ קשיר ו - $Gr(f)$ צפוף ב – X (כלומר $\overline{Gr(f)} = X$), לכן (לפי התרגיל הנ"ל) $X \in Conn$. ז"א יש מרכיב קשירות 1.

אבל אין מסילה מנקודה "אדומה" (על הקטע) לנקודה "ירוקה" (ראו ספר האוניברסיטה הפתוחה, טופולוגיה קבוצתית).

יש 2 מרכיבי קשירות מסילתיים ולכן X לא קשיר מסילתית, כלומר $X \notin PConn$.

<u>**תרגיל:**</u> **(לעתיד)** לכל פונקציה רציפה $Y \xrightarrow{f} X$ מתקיים ש

$X \times Y \supset \underbrace{\{(x, f(x)) | x \in X\} \coloneqq Gr(f)}_{\text{תת מרחב טופולוגי}} \simeq X$.

בהמשך נלמד מכפלה טופולוגית (באופן כללי).

תרגיל: כל קבוצה קשירה ופתוחה O במרחב נורמי E היא קשירה מסילתית.

הסבר: נבחר $a \in O$ ונסמן $a \in \mathrm{A} := [a]_p$ מרכיב קשירות מסילתית של a במרחב O.

אז A פתוחה. כי אם $\mathrm{x} \in \mathrm{A}$ אז $\mathrm{B}_\varepsilon(\mathrm{x}) \subseteq O$ עבור ε מספיק קטן. $\mathrm{B}_\varepsilon(\mathrm{x})$ קמור לכן קיימת מסילה לינארית ב $\mathrm{B}_\varepsilon(\mathrm{x})$ מ x לכל $y \in \mathrm{B}_\varepsilon(\mathrm{x})$. אז גם קיימת מסילה (לא בהכרח לינארית) במרחב O מנקודה a ל y (טרנזיטיביות). לכן $\mathrm{B}_\varepsilon(\mathrm{x}) \subseteq A$.

באופן דומה אפשר להוכיח שגם המשלים $O \setminus A$ פתוח. אבל אז $O \setminus A$ קבוצה ריקה כי אחרת נקבל ש O פריק. לכן $\mathrm{O} = \mathrm{A} = [a]_p$ ואז O קשיר מסילתית (מרכיב 1).

הגדרה: X נקרא **קשיר מקומית** בנקודה $a \in X$ אם לכל סביבה $U \in N(a)$ קיימת סביבה $N(a) \ni V \subseteq U$ כך ש V קשיר. אומרים: *קשיר מקומית* אם זה מתקיים בכל נקודה.

תרגיל:

א. הוכיחו שכל תת קבוצה פתוחה במרחב נורמי היא קשירה מקומית (ולא תמיד קשירה).

ב. ** תנו דוגמה של תת מרחב ב $\mathbb{R}^2$ שהוא קשיר אבל לא קשיר מקומית.

קישורים מומלצים:

https://en.wikipedia.org/wiki/Homeomorphism

https://en.wikipedia.org/wiki/Stereographic_projection

https://en.wikipedia.org/wiki/Connected_space

בסיס לטופולוגיה

נגדיר סימונים חדשים. נניח $\gamma \subseteq P(X)$ (אוסף תת קבוצות ב X). נגדיר:

- $\gamma^{\cup} := \{\cup\{B : B \in \beta\} \mid \beta \subseteq \gamma\}$ (כל מיני איחודים דרך איברים של γ)
- $\gamma^{\cap F} := \{\cap\{B : B \in \beta\} \mid \beta \subseteq \gamma, \beta \text{ is finite}\}$ (חיתוכים סופיים דרך איברים של γ)

תמיד: $\gamma \subseteq \gamma^{\cap F}$ $\gamma \subseteq \gamma^{\cup}$ $\varnothing \in \gamma^{\cup}$ $\varnothing \in \gamma^{\cap F}$ (ניקח β קבוצה ריקה)

למשל אקסיומות טופולוגיה אפשר לכתוב כך:

(t_1) $\varnothing, X \in \tau$ (t_2) $\tau^{\cap F} = \tau$ (t_3) $\tau^{\cup} = \tau$.

__הגדרה:__ (בסיס $basis$) יהי (X,τ) מ"ט. $\gamma \subseteq \tau$ נקרא **בסיס** (לטופולוגיה τ) אם כל קבוצה פתוחה (לא ריקה) שווה לאיחוד איברים מ $-\gamma$.

__הערה:__ (הגדרה שקולה) התנאים הבאים שקולים:

1. γ בסיס לטופולוגיה τ.
2. $\gamma^{\cup} = \tau$.
3. $\gamma \subseteq \tau$ ולכל $O \in \tau$ ולכל $a \in O$ קיים $G_a \in \gamma$ כך ש $a \in G_a \subseteq O$.

__הגדרה:__ אומרים ש - (X,τ) **בעל תכונת מנייה שנייה** ($second\ countable$) ונסמן:

$$(X,\tau) \in B_2$$

אם קיים **בסיס** γ **בן מנייה**.

__דוגמאות__: (תשתמשו בהגדרה (3))

- ב $X = \mathbb{R}$ $\gamma_1 = \{(a,b) \mid a < b\}$ וגם $\gamma_2 = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{Q}\}$ בסיסים.
- ב $X = \mathbb{R}^2$
  - א. γ_0={עיגולים פתוחים}
  - ב. $\gamma_1 = \{(a,b)\times(\mathrm{c,d})\}$={מלבנים פתוחים}
  - ג. γ_2={ריבועים פתוחים} γ_3={משולשים פתוחים}
  - ד. γ_4={עיגולים פתוחים עם מרכזים בנקודות "רציונליות"}
- $\mathbb{R}^n \in B_2$

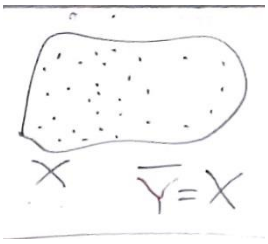
{כדורים פתוחים עם מרכזים בנקודות "רציונליות" ורדיוסים $\gamma_4 = \{\frac{1}{k}$ בן מניה !

- לכל (X,d) "כדורים פתוחים" בסיס לטופולוגיית $top(d)$.

א. $\gamma \coloneqq \{B_r(a)\}_{\substack{a\in X\\ r>0}}$ $\gamma^{\cup} = top(d)$ (ראו משפט: "כדורים בסיס").

ב. גם $\gamma_1 \coloneqq \left\{B_{\frac{1}{n}}(a)\right\}_{\substack{a\in X\\ n\in\mathbb{N}}}$ מהווה בסיס.

<u>**טענה**</u>: לכל (X,d) ולכל $\bar{Y} = X$ (כלומר Y צפוף בX) $\gamma_2 \coloneqq \left\{B_{\frac{1}{n}}(a)\right\}_{\substack{a\in Y\\ n\in\mathbb{N}}}$ מהווה בסיס ל $top(d)$.



<u>**תוצאה חשובה:**</u> אם מרחב מטרי (X,d) הוא ספרבילי אז הוא גם B_2.

$$(X,d) \in B_2 \Leftarrow (X,d) \in Sep$$

<u>**טענה**</u>: הוכיחו ש B_2 תכונה <u>תורשתית</u>.

רמז: תבדקו שאם γ בסיס ל (X,τ) ו $Z \subseteq X$ תת קבוצה אז $\gamma_Z \coloneqq \{G\cap Z \mid G\in\gamma\}$ בסיס לתת מרחב (Z,τ_Z).

<u>טענה</u>: לכל מרחב דיסקרטי (X,τ_{discr}) אוסף כל הנקודונים $\gamma_0 = \{\{x\} \mid x\in X\}$ הוא בסיס ל (X,τ_{discr}). לכל בסיס אחר γ מתקיים $\gamma_0 \subseteq \gamma$.

הסיקו: $(X,\tau_{discr}) \in B_2 \Leftrightarrow |X| \le \aleph_0$.

למשל: $(\mathbb{R},\tau_{discr}) \notin B_2$