תזכורת

יש לנו מפה $\mathbb{R}^2 \supseteq U \to M \subseteq \mathbb{R}^2$. אמרנו שאפשר למצוא מיפוי $M \to S^2$, כאשר המיפוי ממפה כל נקודה בM לווקטור יחידה שניצב למשטח באותה נקודה.

המיפוי הזה משרה מפה של דיפרנציאל: אם יש לנו $r : U \to M$, אז הדיפרנציאל $\mathrm{d}r_a : T_aU \to T_AM$ הוא מיפוי המקיים $\mathrm{d}r_a\left(x\right) \in \mathbb{R}^3$. כמו כן המטריצה

$$\mathrm{d}r_a^t \mathrm{d}r_a =: g$$

היא המטריקה, או התבנית היסודית הראשונה, ודרכו אפשר למדוד אורכים באמצעות

$$x^t g x = I\left(x, x\right) \in \mathbb{R}$$

כאשר $x \in T_aU$.

התבנית היסודית השנייה

אם יש לנו מיפוי $\rho : U \to M \to S^2$(כלומר $\rho : U \to S^2$, אבל עוברים דרך M בדרך) - זוהי מפה שמתאימה כל נקודה בשטח לנקודה על פני הכדור.

אפשר להגדיר דיפרנציאל: $\mathrm{d}\rho_a : T_AU \to T_{\hat{n}(r(A))}M$.[1]

התבנית היסודית השניה מוגדרת

$$II : T_aU \times T_aU \to \mathbb{R}$$

כאשר

$$II_a\left(X, Y\right) = -\left\langle \mathrm{d}r_a\left(x\right), \mathrm{d}\rho_a\left(Y\right)\right\rangle$$

ומשמעותה - אם הלכתי כך וכך לכיוון כך וכך, כמה השתנה הוקטור הנורמלי?

נסמן

$$r_i = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x^i} = \mathrm{d}r\left(x^i\right)$$

משפט

$$II_a\left(x, y\right) = II_a\left(y, x\right)$$

[1] כאשר $\hat{n}\left(rA\right)$ הוא וקטור יחידה הניצב לפני הכדור

הוכחה

$\langle r_i, n\rangle = 0$ כי $\hat{n} \perp T_A M$. נגזור לפי x^j:

$$\langle r_{ij}, \hat{n}\rangle + \langle r_i, n_j\rangle = 0$$

$$-\langle r_i, n_j\rangle = \langle r_{ij}, n\rangle =$$

$$= II_a\left(x^i, x^j\right)$$

כנ"ל:

$$\langle r_j, n\rangle = 0$$

נגזור לפי x^i לקבל

$$-\langle r_j, n_i\rangle = \langle r_{ji}, n\rangle = \langle r_{ij}, n\rangle = II_a\left(x^j, x^i\right)$$

מכאן שלכל וקטורי הבסיס II_a תבנית חילופית ובילינארית - נובע שלכל הוקטורים.

■

מסקנה

$$II_a\left(u, v\right) = \left\langle \frac{\mathrm{d}^2 r\left(u, v\right)}{\mathrm{d}u\mathrm{d}v}, \hat{n}\right\rangle$$

כלומר אפשר לכתוב

$$\Pi_a\left(x, y\right) = x^t B y$$

כאשר

$$B_{ij} = \langle r_{ij}, \hat{n}\rangle$$

אופרטור הצורה

S - אופרטור הצורה - מוגדר ע"י

$$II_a\left(x, y\right) = \langle Sx, y\rangle = \langle x, Sy\rangle$$

$$x^t B y = \left(Sx\right)^t g y = x^t S^t g y$$

$$B = S^t g$$

$$B = B^t = g^t S = gS$$

$$S = g^{-1} B$$

דוגמה - אליפסואיד

$$r(u,v) = \begin{pmatrix} a\cos u\cos v \\ a\cos u\sin v \\ c\sin u \end{pmatrix}$$

$$r_u = \begin{pmatrix} -a\sin u\cos v \\ -a\sin u\sin v \\ c\cos u \end{pmatrix} \qquad r_v = \begin{pmatrix} -a\cos u\sin v \\ a\cos u\cos v \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rcccl} g_{11} & = & r_u r_u & = & a^2\sin^2 u + c^2\cos^2 u \\ g_{12} = g_{21} & = & r_u r_v & = & 0 \\ g_{22} & = & r_v r_v & = & a^2\cos^2 u \end{array}$$

נשים לב שהמטריקה לא תלויה בכלל ב-v - והסיבה היא שיש כאן סימטריה של סיבוב, ולכן המטריקה לא תלויה בסיבוב סביב ציר ה-z.

בשביל לחשב את הוקטור הנורמלי בכל נקודה ונקודה:

$$\hat{n} = \frac{r_u \times r_v}{\|r_u \times r_v\|} = \frac{1}{\|\cdot\|} \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ -a\sin u\cos v & -a\sin u\sin v & c\cos u \\ -a\cos u\sin v & a\cos u\cos v & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2\sin^2 u + c^2\cos^2 u}} \begin{pmatrix} c\cos u\cos v \\ c\cos u\sin v \\ a\sin u \end{pmatrix}$$

$$r_{uu} = \begin{pmatrix} -a\cos u\cos v \\ -a\cos u\sin v \\ -c\sin u \end{pmatrix} \qquad r_{uv} = \begin{pmatrix} a\sin u\sin v \\ -a\sin u\cos v \\ 0 \end{pmatrix} \qquad r_{vv} = \begin{pmatrix} -a\cos u\cos v \\ -a\cos u\sin v \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$B_{11} = \frac{ac}{\sqrt{a^2\sin^2 u + c^2\cos^2 u}} \qquad B_{12} = B_{21} = 0 \qquad B_{22} = \frac{ac\cos^2 u}{\sqrt{a^2\sin^2 u + c^2\cos^2 u}}$$

$$B = \frac{ac}{\sqrt{a^2\sin^2 u + c^2\cos^2 u}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2 u \end{pmatrix}$$

קיבלנו את B, מטריצה מלוכסנת, שהיא התבנית היסודית השנייה.

איך משתמשים בזה? אם יש לנו עקומה $\gamma\left(t\right)$, אז

$$\frac{\mathrm{d}\hat{n}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{h}\left(\gamma\left(t\right)\right)=\sum_{i}\frac{\mathrm{d}\hat{n}}{\mathrm{d}x^{i}}\cdot\frac{\mathrm{d}\gamma^{i}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\hat{n}}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\hat{n}}{\mathrm{d}v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$n\left(t_{n}\right)=n\left(t_{0}\right)+\int_{t_{0}}^{t_{1}}\frac{\mathrm{d}\hat{n}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t$$

התבנית היסודית השניה נועדה לקשר לנו בין המסלולים על המפה לרמת הכיפוף שלהם.

אופרטור הצורה הוא $S=g^{-1}B$, כלומר

$$S=\frac{ac}{\sqrt{a^{2}\sin^{2}u+c^{2}\cos^{2}u}}\begin{pmatrix}\frac{1}{a^{2}\sin^{2}u+c^{2}\cos^{2}u} & 0\\ 0 & \frac{1}{a^{2}}\end{pmatrix}$$

$$II_{a}\left(X,Y\right)=\left\langle SX,Y\right\rangle =II_{a}\left(SX,Y\right)$$

אם $a=c$, אז

$$g=\begin{pmatrix}a^{2} & 0\\ 0 & a^{2}\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & a\cos^{2}u\end{pmatrix}$$

$$S=\begin{pmatrix}\frac{1}{a} & 0\\ 0 & \frac{1}{a}\end{pmatrix}$$

הגדרה - עקמומיות

הגדרנו כבר עקמומיות עבור עקומה(=מסילה) - עכשיו נגדיר עקמומיות עבור משטח.

ערכי העקמומיות הראשיים הם הע"ע של S, והכיוונים הראשיים הם הווקטורים העצמיים המתאימים, אשר מאונכים זה לזה.

עקמומיות גאוס מוגדרת להיות

$$K=\det S=\frac{\det B}{\det g}=k_{1}\cdot k_{2}$$

עקמומיות ממוצעת מוגדרת להיות

$$H=\frac{1}{2}\mathrm{tr}\ S=\frac{1}{2}\left(k_{1}+k_{2}\right)$$

דוגמה

נסתכל על גליל אינסופי ברדיוס R. אפשר לכתוב לו מפה:

$$r = \begin{pmatrix} R\cos u \\ R\sin u \\ v \end{pmatrix}$$

נחשב:

$$r_u = \begin{pmatrix} -R\sin u \\ R\cos u \\ 0 \end{pmatrix} \qquad r_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$g = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{n} = \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ -R\sin u & R\cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\|\cdot\|} = \frac{\hat{x}R\cos u + \hat{y}R\sin u}{\sqrt{R^2\cos^2 u + R^2\sin^2 u}} = \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$r_{uu} = \begin{pmatrix} -R\cos u \\ -R\sin u \\ 0 \end{pmatrix} \qquad r_{uv} = r_{vu} = 0 \qquad r_{vv} = 0$$

$$B = \begin{pmatrix} -R & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} -\frac{1}{R} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = g^{-1}B$$

$$H = -\frac{1}{2R} \qquad K = 0$$

עקמומיות גאוס של החרוט היא 0! זה קורה בגלל שאפשר לקפל נייר לגליל בלי לקמט אותו ־ מה שאי אפשר למשל לעשות עם כדור. אי אפשר לדעת שגליל הוא עקום רק מתוך טיול עליו ־ שוב, בניגוד לכדור ששם אפשר להגיע למשולש שכל זוויותיו ישרות וכך להסיק שמדובר במשטח עקום.

תזכורת ־ סימונים

$$A_{ij}B^{jk} = \sum_j A_{ij}B^{jk}$$

$$A_{i,j} \equiv \frac{\partial A_i}{\partial x^j}$$

$$A_{,ij} = \frac{\partial^2 A}{\partial x^i \partial x^j}$$

מטריצה הפכית

g^{ij} מוגדרת להיות ההפכית של g_{ij}, כלומר $g_{ij} \cdot g^{jk} = {\delta_i}^k$

מקדמי כריסטופל

אם יש לנו פרמטריזציה של משטח $r : U_{\subseteq \mathbb{R}^2} \to M \subseteq \mathbb{R}^3$
לאחר שחישבנו את

$$r_{,1} \qquad r_{,2} \qquad \hat{n}$$

אפשר לחשב את

$$\begin{aligned} r_{,11} &= {\Gamma^1}_{11} r_{,1} + {\Gamma^2}_{11} r_{,2} + b_{11}\hat{n} \\ r_{,21} = r_{,12} &= {\Gamma^1}_{12} r_{,1} + {\Gamma^2}_{12} r_{,2} + b_{12}\hat{n} \\ r_{,22} &= {\Gamma^1}_{22} r_{,1} + {\Gamma^2}_{22} r_2 + b_{22}\hat{n} \end{aligned}$$

ובסימון איינשטיין ניתן לכתוב

$$r_{,ij} = {\Gamma^k}_{ij} r_{,k} + b_{ij}\hat{n}$$

${\Gamma^k}_{ij}$ נקראי מקדמי כריסטובל, והם מוגדרים לפי הנוסחאות הללו. את b_{ij} אפשר לחשב לפי:

$$b_{ij} = \langle r_{,ij}, \hat{n} \rangle$$

ואז צריך לחשב 6 מספרים:

$${\Gamma^1}_{11} \qquad {\Gamma^1}_{12} = {\Gamma^1}_{21} \qquad {\Gamma^1}_{22}$$

$${\Gamma^2}_{11} \qquad {\Gamma^2}_{12} = {\Gamma^2}_{21} \qquad {\Gamma^2}_{22}$$

מה זה נותן לנו?

אם יש לנו יריעה ווקטור המשיק לנקודה, אנו רוצים לדעת איך הוקטור המשיק משתנה עם שינוי הנקודה. זה נקרא Parallel displacement. הרעיון הוא שאם רוצים להמשיך ללכת באותו כיוון על משטח עקום, אז אי אפשר לשמור על אותו כיוון כמו במשטח ישר, ולכן משתמשים בהיטל על מישור, ומסתפקים בכל שההיטל שומר על כיוון.

הקשר בין התבנית היסודית הראשונה למקדמי כריסטופל

$$\langle r_{,ij}, r_{,m}\rangle = \left\langle {\Gamma^k}_{ij} r_{,k}, r_{,m}\right\rangle + \cancel{\langle b_{ij}\hat{n}, r_{,m}\rangle} = {\Gamma^k}_{ij} g_{km}$$

שכן $\langle r_{,k}, r_{,m}\rangle \equiv g_{km}$. עכשיו:

$$g_{ij,m} = \frac{\partial}{\partial x^m}\langle r_{,i}, r_{,j}\rangle = \langle r_{,im}, r_{,j}\rangle + \langle r_{,jm}, r_{,i}\rangle = {\Gamma^k}_{mj} g_{ki} + {\Gamma^k}_{ij} g_{km}$$

$$g_{jm,i} = {\Gamma^k}_{ji} g_{km} + {\Gamma^k}_{mi} g_{kj}$$

$$g_{mi,j} = {\Gamma^k}_{mj} g_{ki} + {\Gamma^k}_{ij} g_{km}$$

$$g_{mi,j} + g_{jm,i} - g_{ij,m} = 2{\Gamma^k}_{ij} g_{km}$$

(חשוב לזכור - משתמשים כאן בסימוני איינשטיין!)

רוצים לקבל את המקדמים Γ עצמם, אבל יש לנו כאן כפל בg_{km} - ולכן נכפיל בהפכי:

$$g^{nm}\left(g_{mi,j} + g_{jm,i} - g_{ij,m}\right) = 2{\Gamma^k}_{ij} g_{km} g^{mn} = 2\Gamma^k_{ij}\delta^n_u = 2{\Gamma^n}_{ij}$$

וקיבלנו את הנוסחה למקדמי כריסטופל:

$$\boxed{{\Gamma^k}_{ij} = \frac{1}{2} g^{km}\left(g_{mi,j} + g_{jn,i} - g_{ij,k}\right)}$$

הערה

אנו מתעניינים בשני מימדים, אבל באופן כללי המשוואה הזו נכונה לכל מימד.

במפורש

$${\Gamma^1}_{11} = \frac{1}{2}\left(g^{11} g_{11,1} + g^{12}\left(2g_{12,1} - g_{11,2}\right)\right)$$

$${\Gamma^2}_{11} = \frac{1}{2}\left(g^{12} g_{11,1} + g^{22}\left(2g_{21,1} - g_{11,2}\right)\right)$$

$${\Gamma^1}_{12} = {\Gamma^1}_{12} = \frac{1}{2}\left(g^{11} g_{11,2} + g^{12} g_{22,1}\right)$$

$${\Gamma^2}_{12} = {\Gamma^2}_{21} = \frac{1}{2}\left(g^{12} g_{11,2} + g^{22} g_{22,1}\right)$$

$${\Gamma^1}_{22} = \frac{1}{2}\left(g^{11}\left(2g_{12,2} - g_{22,1}\right) + g^{12} g_{22,2}\right)$$

$${\Gamma^2}_{22} = \frac{1}{2}\left(g^{12}\left(2g_{12,2} - g_{22,1}\right) + g^{22} g_{22,2}\right)$$