תרגיל בית 6 מבוא לתורת החבורות
88-211 סמסטר א' תשע"ז

הוראות בהגשת הפתרון יש לרשום שם מלא, מספר ת"ז ומספר קבוצת תרגול. תאריך הגשת התרגיל הוא בתרגול בשבוע המתחיל בתאריך ג' טבת ה'תשע"ז, 1.1.2017.

שאלות חימום

שאלות החימום הן שאלות שאינן להגשה, והן בדרך כלל קלות יותר. אבל כדאי מאוד לוודא שיודעים איך לפתור אותן, אפילו בעל פה.

שאלה 1. תהי $H \subseteq G$ תת־קבוצה של חבורה G. הוכיחו ש-$H \leq G$ אם ורק אם $\langle H \rangle = H$.

שאלה 2. יהיו $f : G \to H$ ו-$g : H \to K$ הומומורפיזמים של חבורות. הוכיחו שההרכבה $g \circ f : G \to K$ היא הומומורפיזם.

שאלה 3. תהינה G, H שתי חבורות, ונסמן $K = G \times \{e_H\}$. הוכיחו כי $K \lhd G \times H$, $G \cong K$ וגם $(G \times H)/K \cong H$.

שאלות להגשה

שאלה 4. תהי G חבורה, ותהי $H \leq G$ תת־חבורה. נגדיר את המנרמל (או הנורמליזטור) של H ביחס ב-G להיות

$$N_G(H) = \{g \in G \,|\, gH = Hg\}$$

א. הוכיחו כי $N_G(H) \leq G$.

ב. הוכיחו כי $H \lhd N_G(H)$.

ג. הסבירו מדוע $N_G(H)$ היא תת־החבורה הגדולה ביותר של G שבה H נורמלית. הסיקו כי $H \lhd G$ אם ורק אם $N_G(H) = G$.

שאלה 5. נתבונן בחבורה $G = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

א. הוכיחו שהסדר של כל איבר ב-G הוא סופי, אבל שישנם איברים בחבורה מסדר גדול כרצוננו.

ב. הראו כי תת־החבורה $H = \left\langle \frac{2}{3} + \mathbb{Z}, \frac{3}{11} + \mathbb{Z} \right\rangle$ (שנוצרת על ידי המחלקות של $\frac{2}{3}$ ו-$\frac{3}{11}$) היא ציקלית. מצאו את האינדקס $[G : H]$.

שאלה 6. עבור כל אחת מן ההעתקות הבאות קבעו והוכיחו האם היא הומומורפיזם, מונומורפיזם, אפימורפיזם או איזומורפיזם.

א. $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{C}^*$ המוגדרת לפי $f(x)=x^2$.

ב. $f:S_3\to\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3$ המוגדרת לפי $f(\sigma)=(\sigma(1),\sigma(2))$.

ג. $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_n$ המוגדרת לפי $f(k)=[k]$ (כלומר שולחת כל מספר k למחלקת השקילות שלו מודולו n).

ד. $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_n\times\mathbb{Z}_n$ המוגדרת לפי $f(k)=([k],[k])$.

ה. $f_x:G\to G$ המוגדרת לפי $f_x(g)=x^{-2}gx^2$, כאשר G חבורה ו-$x\in G$ איבר.

שאלה 7. יהי $f:G\to H$ הומומורפיזם. הוכיחו שאם G נוצרת סופית, אז גם $\operatorname{im} f$ היא חבורה נוצרת סופית. (ודאו שקל לכם להראות שההפך לא נכון.)

שאלה 8. הפריכו או הביאו דוגמה לטענות הבאות:

א. קיים אפימורפיזם $f:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Q}$ (רמז: העזרו בשאלה הקודמת).

ב. קיים אפימורפיזם $f:\mathbb{Z}_{50}\to\mathbb{Z}_{10}\times\mathbb{Z}_5$.

ג. קיים מונומורפיזם $f:\mathbb{Z}_{63}\to\mathbb{Z}_9\times\mathbb{Z}_7$.

ד. קיים מונומורפיזם $f:D_4\to\mathbb{Z}_8\times U_8\times U_8$.

ה. קיים איזומורפיזם $f:S_4\to D_{12}$.

ו. קיים מונומורפיזם $f:S_4\to S_5\times D_{12}$.

שאלות רשות

את שאלות הרשות אין חובה לפתור, אבל אם פתרתם אותן, בבקשה צרפו את הפתרון שלהן.

שאלה 9. תהי G חבורה ויהיו $x,y\in G$ איברים. נתון כי $|G|=14$, $x\neq e$ ו-$y\notin\langle x\rangle$. הוכיחו כי $\langle x,y\rangle=G$. נסו גם להוכיח $G\cong D_7$.

שאלה 10. הוכיחו שחבורה G היא היא איחוד של שלוש תת־חבורות אמיתיות שלה אם ורק אם $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ היא תמונה אפימורפית של G. רמז: העזרו בשאלת רשות מתרגיל קודם.
תזכורת: חבורה H נקראת תמונה אפימורפית של G אם קיים אפימורפיזם $f:G\to H$.

בהצלחה!