פתרון תרגיל מספר 1

1. א. מצאו את כל המספרים $z\in\mathbb{C}$ כך ש- $z^6-9iz^3-8=0$.

<u>פתרון</u>: נסמן $w=z^3$ ונקבל $w^2-9iw-8=0$. מנוסחא לפתרון משוואה ריבועית נקבל $w=i,8i$. נמצא את ההצגה הקוטבית של $w=i$. קל לבדוק ש- $|i|=1$, כמו כן אם נסמן $\theta=\arg(i)$ אז

$$\cos\theta=\frac{\operatorname{Re}(i)}{|i|}=0\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{2}+\pi k,k\in\mathbb{Z}.$$

$$\sin\theta=\frac{\operatorname{Im}(i)}{|i|}=1\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{2}+2\pi k,k\in\mathbb{Z}.$$

משתי המשוואות האחרונות נובע ש- $\theta=\frac{\pi}{2}+2\pi k$ וכיוון שאנו מניחים ש- $-\pi\le\theta<\pi$ נקבל $\theta=\frac{\pi}{2}$. לכן נקבל את ההצגה הקוטבית $i=\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ולכן גם $8i=8\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)$. לכן הפתרונות של המשוואה הם

$$z=\operatorname{cis}\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3}\right)=\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{3}\right),k=0,1,2.$$ ו-

$$z=\sqrt[3]{8}\operatorname{cis}\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3}\right)=2\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{3}\right),k=0,1,2.$$

ב. מצאו את כל המספרים $z\in\mathbb{C}$ כך ש- $\left(z+\frac{1}{z}\right)^2=-1$, רשמו את הפתרון בצורה: $z=a+ib,\ a,b\in\mathbb{R}$.

<u>פתרון</u>: קל לבדוק שהמשוואה המקורית שקולה למשוואה $\left(z^2+1\right)^2=-z^2$. ע"י לקיחת שורש בשני האגפים נקבל את שתי המשוואות $z^2+1=iz$ ו- $z^2+1=-iz$. נסמן $z=a+ib$ וע"י הצבה בשתי המשוואות האחרונות נקבל

$$(a+ib)^2+1=i(a+ib)\Rightarrow a^2-b^2+1+2iab=-b+ia\quad(1)$$ ו-

$$(a+ib)^2+1=-i(a+ib)\Rightarrow a^2-b^2+1+2iab=b-ia\quad(2)$$

נפתור קודם את משוואה (1). ע"י השוואת החלקים הממשיים והמדומים בהתאמה נקבל

$$2ab=a \text{ ו- } a^2-b^2+1=-b.$$

אם $a=0$ אז מהמשוואה $a^2-b^2+1=-b$ נקבל ש- $b^2-b-1=0$ ולכן $b=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

אם $a\neq 0$ אז מהמשוואה $2ab=a$ נקבל ש- $b=\frac{1}{2}$. לכן מהמשוואה $a^2-b^2+1=-b$ נקבל $a^2=-\frac{5}{4}$ ולמשוואה זו אין פתרון. באותו אופן מראים שהפתרונות של משוואה (2) הם $b=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

לסיכום נקבל שפתרונות המשוואה המקורית הם $z=i\left(\frac{\pm1\pm\sqrt{5}}{2}\right)$.

ג. מצאו את כל הפתרונות של המשוואה $\left(\sqrt{3}+i\right)z^4=(1-i)z$, אפשר לכתוב אותם בצורה $re^{i\theta}$.

<u>פתרון</u>: קל לבדוק ש- $z=0$ הוא פתרון של המשוואה. אם $z\neq 0$ אז המשוואה שקולה ל-

$$z^3=\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}=\frac{(1-i)\left(\sqrt{3}-i\right)}{\left(\sqrt{3}+i\right)\left(\sqrt{3}-i\right)}=\frac{\sqrt{3}-1-i\left(\sqrt{3}+1\right)}{4}:=w$$

נמצא את ההצגה הקוטבית של w:

$$|w|^2=\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2+\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{4^2}=\frac{3-2\sqrt{3}+1+3+2\sqrt{3}+1}{16}=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}\Rightarrow|w|=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

נמצא את הארגומנט של w: קל לבדוק שהנקודה w נמצאת ברביע השני, לכן ניתן למצוא את הארגומנט של- w בעזרת הפונקציה ארגטנגנס (מבלי להוסיף פאי או מינוס פאי לתוצאה הסופית). לכן

$$\theta=\arg(w)=\arctan\left(\frac{\operatorname{Im}w}{\operatorname{Re}w}\right)=\arctan\left(-\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right)=-\frac{5}{12}\pi$$

לכן ההצגה הקוטבית של w היא $w=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{cis}\left(-\frac{5\pi}{12}\right)$. לכן מנוסחא למציאת שורשים נקבל

$$z=\sqrt[3]{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}\operatorname{cis}\left(\frac{-\frac{5\pi}{12}+2\pi k}{3}\right)=\frac{1}{\sqrt[6]{2}}\operatorname{cis}\left(-\frac{5\pi}{36}+\frac{2\pi k}{3}\right),\ k=0,1,2.$$

מכאן קיבלנו את כל ארבעת הפתרונות האפשריים.

ד. מצאו את כל האפסים של הפולינום $p(z)=z^4+4z^3+6z^2+4z+i$ ב- $\mathbb{C}$.

<u>פתרון</u>: נשתמש בזהות $z^4+4z^3+6z^2+4z+1=(z+1)^4$ ונקבל

$$p(z)=z^4+4z^3+6z^2+4z+i=z^4+4z^3+6z^2+4z+1-1+i=(z+1)^4-1+i.$$

לכן עלינו לפתור את המשוואה $(z+1)^4=1-i$. נסמן $w=1-i$ ונמצא את ההצגה הקוטבית של w.

$$|w|^2=1^2+1^2=2\Rightarrow|w|=\sqrt{2}$$

כמו כן אם נסמן $\theta=\arg(w)$ אז

$$\cos\theta=\frac{\operatorname{Re}(w)}{|w|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\theta=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k,k\in\mathbb{Z}$$

$$\sin\theta=\frac{\operatorname{Im}(w)}{|w|}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\theta=-\frac{\pi}{4}+2\pi k,\frac{5}{4}\pi+2\pi k,k\in\mathbb{Z}$$

לכן משתי המשוואות האחרונות נקבל ש- $\theta=-\frac{\pi}{4}+2\pi k$ וכיוון ש- $-\pi\le\theta<\pi$ נקבל $\theta=-\frac{\pi}{4}$. לכן נקבל ש- $w=\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$. לכן כיוון ש- $(z+1)^4=\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ אז מנוסחא למציאת שורשים נקבל

$$z+1=\sqrt[8]{2}\operatorname{cis}\left(\frac{-\frac{\pi}{4}+2\pi k}{4}\right)=\sqrt[8]{2}\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{16}+\frac{\pi k}{2}\right)\Rightarrow z=-1+\sqrt[8]{2}\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{16}+\frac{\pi k}{2}\right),k=0,1,2,3.$$

ה. מצאו את כל הערכים ב- $\mathbb{C}$ של $\left[\frac{(1+i)^5}{(1-i)^5}\right]^{\frac{1}{3}}$.

<u>פתרון</u>: עלינו למצוא את פתרונות המשוואה $z^3=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^5$. נסמן $w=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^5$ ונמצא את ההצגה הקוטבית של- w. קודם נרשום את w בצורה

$$w=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^5=\left(\frac{1+i}{1-i}\frac{1+i}{1+i}\right)^5=\left(\frac{2i}{2}\right)^5=i^5=i$$

כפי שהראינו בתרגיל 1, ההצגה הקוטבית של i היא $i=\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)$. לכן פתרונות המשוואה המקורית הם

$$z^3 = i = \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow z = \operatorname{cis}\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3}\right) = \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{3}\right), k = 0,1,2.$$

2.א. הוכיחו שאם $|z|=1$ אז הביטוי $\frac{z^2+2z+1}{z^2-2z+1}$ הוא ממשי.

<u>פתרון</u>: נזכור שמספר מרוכב w הוא ממשי אם ורק אם $w=\overline{w}$. לכן עלינו להראות שהביטוי בשאלה שווה לצמוד של עצמו. ואכן

$$\frac{z^2+2z+1}{z^2-2z+1} = \overline{\left(\frac{z^2+2z+1}{z^2-2z+1}\right)} \Leftrightarrow \frac{(z+1)^2}{(z-1)^2} = \overline{\left(\frac{(z+1)^2}{(z-1)^2}\right)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{(z+1)^2}{(z-1)^2} = \frac{\overline{(z+1)^2}}{\overline{(z-1)^2}} \Leftrightarrow \frac{(z+1)^2}{(z-1)^2} = \frac{(\overline{z}+1)^2}{(\overline{z}-1)^2} \Leftrightarrow (z+1)^2(\overline{z}-1)^2 = (\overline{z}+1)^2(z-1)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(z\overline{z}-z+\overline{z}-1\right)^2 = \left(\overline{z}z-\overline{z}+z-1\right)^2 \Leftrightarrow \left(|z|^2-2i\operatorname{Im}(z)-1\right)^2 = \left(|z|^2+2i\operatorname{Im}(z)-1\right)^2$$
$$\Leftrightarrow \left(-2i\operatorname{Im}(z)\right)^2 = \left(2i\operatorname{Im}(z)\right)^2$$

כאשר במעבר האחרון השתמשנו בנתון ש- $|z|=1$. כיוון שברור ש- $\left(-2i\operatorname{Im}(z)\right)^2 = \left(2i\operatorname{Im}(z)\right)^2$ נובע שהטענה שרצינו להוכיח נכונה.

ב. נניח ש- z ו- w הם מספרים מרוכבים כך ש- $\operatorname{Im}(z+w)=\operatorname{Im}(zw)=0$ אז הוכיחו ש- או $z=\overline{w}$ או ש- z ו- w הם שניהם מספרים ממשיים.

<u>פתרון</u>: נסמן $z=a+ib$ ו- $w=c+id$, אז

$$w+z = a+ib+c+id = a+c+i(b+d) \Rightarrow \operatorname{Im}(w+z) = b+d.$$
$$w\cdot z = (a+ib)\cdot(c+id) = ac-bd+i(ad+bc) \Rightarrow \operatorname{Im}(w\cdot z) = ad+bc.$$

מהנתון נובע ש- $b+d=ad+bc=0$. כעת נבדיל בין שני מקרים

- אם $b=0$ אז מהמשוואה $b+d=0$ נקבל $d=0$ ולכן z ו- w הם שניהם מספרים ממשיים.

- אם $b\neq 0$ אז מהמשוואה $b+d=0$ נקבל $b=-d$ ואז מהמשוואה $ad+bc=0$ נקבל $ad-dc=0$,
כיוון ש- $d\neq 0$ (כי $b\neq 0$) נקבל ש- $a=c$. לכן

$$z=a+ib=c-id=\overline{(c+id)}=\overline{w}$$

לכן הוכחנו את הטענה.

ג. הוכיחו שאם $z\in\mathbb{C}$ ו- $|z|=1$ אז $\left|\frac{z^3-2}{1-2z^3}\right|=1$.

<u>פתרון:</u> ניזכר ש- $|w|=1$ אם"ם $w\overline{w}=1$. לכן נראה שהביטוי $w=\frac{z^3-2}{1-2z^3}$ מקיים $w\overline{w}=1$:

$$\frac{z^3-2}{1-2z^3}\overline{\left(\frac{z^3-2}{1-2z^3}\right)}=\frac{z^3-2}{1-2z^3}\frac{\overline{z}^3-2}{1-2\overline{z}^3}=\frac{z^3\overline{z}^3-2z^3-2\overline{z}^3+4}{1-2\overline{z}^3-2z^3+4z^3\overline{z}^3}=\frac{\left(z\overline{z}\right)^3-2z^3-2\overline{z}^3+4}{1-2\overline{z}^3-2z^3+4\left(z\overline{z}\right)^3}$$

$$=\frac{|z|^3-2z^3-2\overline{z}^3+4}{1-2\overline{z}^3-2z^3+4|z|^3}\underset{*}{=}\frac{1-2z^3-2\overline{z}^3+4}{1-2\overline{z}^3-2z^3+4}=\frac{5-2z^3-2\overline{z}^3}{5-2\overline{z}^3-2z^3}=1$$

כאשר במעבר $(*)$ השתמשנו בנתון $|z|=1$.

ד. הוכיחו שאם $\operatorname{Re}(z)>0$ ואם $z\neq 1$ אז $\left|\frac{z+1}{z-1}\right|>1$.

<u>פתרון:</u>

$$\left|\frac{z+1}{z-1}\right|>1\Leftrightarrow|z+1|>|z-1|\Leftrightarrow|z+1|^2>|z-1|^2\Leftrightarrow(z+1)\overline{(z+1)}>(z-1)\overline{(z-1)}$$

$$\Leftrightarrow(z+1)(\overline{z}+1)>(z-1)(\overline{z}-1)\Leftrightarrow z\overline{z}+z+\overline{z}+1>z\overline{z}-z-\overline{z}+1\Leftrightarrow 2(z+\overline{z})>0\Leftrightarrow 4\operatorname{Re}(z)>0$$

המשוואה האחרונה נכונה מהנתון, לכן המשוואה $\left|\frac{z+1}{z-1}\right|>1$ אכן נכונה.