אנליזה מתקדמת למורים, פתרון תרגיל 4

15 בנובמבר 2018

1. מצאו את הגבולות של הסדרות המרוכבות הבאות:

(א) $z_n = (0.5\text{cis}\frac{\pi}{6})^{2n}$

(ב) $z_n = (1 - \frac{1}{n})^n\text{cis}\frac{\pi}{4}$

(ג) $z_n = \frac{2n^2-3n+1}{8n^2+2} - 2 \cdot \sqrt[n]{n}i$

<u>פתרון:</u>

א. ראינו שכיון שהנורמה $|z| = 0.5 < 1$ אז מתקיים $z^n \to 0$. ולכן גם $z^{2n} = (z^n)^2 \to 0$.

ב. הגבול הוא: $\frac{1}{e}\text{cis}\frac{\pi}{4}$. הוכחה: נראה התכנסות רכיב רכיב: נתבונן בסדרה בהצגה הקרטזית: $z_n = (1 - \frac{1}{n})^n \cos\frac{\pi}{4} + (1 - \frac{1}{n})^n \sin\frac{\pi}{4}i = (1 - \frac{1}{n})^n \cdot (\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}i)$. כלומר, יש כאן קבוע, $\text{cis}\frac{\pi}{4}$ כפול הסדרה $(1 - \frac{1}{n})^n$, וראינו שזה הקבוע כפול גבול הסדרה. ניזכר בקורס הקודם שמתקיים: $(1-\frac{1}{n})^n \to \frac{1}{e}$, ולכן בסה"כ נקבל: ולכן נקבל כי זה קבוע כפול מתכנסת.

$$z_n \to \frac{1}{e}\text{cis}\frac{\pi}{4}$$

ג. כאן נפתור לפי מה שראיתם בהרצאה שהסדרה $z_n = a_n + b_n i$ מתכנסת אם ורק אם הסדרות a_n, b_n מתכנסות. ואכן מתקיים: $a_n = \frac{2n^2-3n+1}{8n^2+2} \to \frac{2}{8} = 0.25$, וכן $b_n = -2 \cdot \sqrt[n]{n} \to -2$, ולכן בסה"כ:

$$z_n \to 0.25 + 2i$$

2. הראו שהפונקציות הבאות לא רציפות בנקודה $(0,0)$ (בנקודות מהצורה $(x,0), x \neq 0$ אין צורך לבדוק):

א.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin x}{y} & y \neq 0 \\ 1 & y = 0 \end{cases}$$

ב.

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x}{y}-\frac{y}{x} & x,y\neq 0\\ 0 & x=0\vee y=0\end{cases}$$

ג.

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2}{x^2+y^4} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

.

<u>פתרון:</u>

בתרגיל הזה צריך למצוא בכל סעיף שתי זוגות של סדרות שהגבול $f(x_n,y_n)$ לפי כל אחת שונה.

א. אם ניקח את הסדרות $x_n=y_n=\frac{1}{n}$ נקבל $f(x_n,y_n)=\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\to 1$ לפי הידוע משנה שעברה. אם נקבע את סדרת האיקסים להיות תמיד אפס, כלומר, $x_n=0$, וניקח למשל $y_n=\frac{1}{n}$, אז נקבל סדרת אפסים (כי המונה תמיד אפס), ולכן הגבול גם הוא אפס (הסדרה היא $f(x_n,y_n)=\frac{\sin 0}{\frac{1}{n}}=0$). כיון שהגבולות שונים הפונקציה לא רציפה.

ב. אם ניקח סדרות שוות $x_n=y_n$ (לא משנה מה הן בדיוק, למשל $\frac{1}{n}$) נקבל את הסדרה $f(x_n,y_n)=\frac{x_n}{x_n}-\frac{x_n}{x_n}=1-1=0$, שהיא סדרת אפסים ולכן הגבול הוא אפס. אם ניקח את הסדרות $x_n=\frac{1}{n},y_n=\frac{2}{n}$ נקבל את הסדרה $f(x_n,y_n)=\frac{\frac{1}{n}}{\frac{2}{n}}-\frac{\frac{2}{n}}{\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}-2=-1.5$ שהיא סדרה קבועה ולכן הגבול הוא -1.5. כיון שהגבולות שונים הפונקציה לא רציפה.

ג. אם נקבע את $x_n=0$ וניקח סדרה למשל $y_n=\frac{1}{2}$ נקבל סדרת אפסים שהגבול הוא אפס. אם ניקח סדרות מהצורה $x_n=y_n^2$ נקבל את הסדרה $f(x_n,y_n)=\frac{y_n^2\cdot y_n^2}{y_n^4+y_n^4}=\frac{y_n^4}{2y_n^4}=\frac{1}{2}\to\frac{1}{2}$ סדרה קבועה שהגבול הוא חצי. כיון שהגבולות שונים הפונקציה לא רציפה.

3. הראו שהפונקציות הבאות רציפות ב$\mathbb{R}^2$ (כלומר, רציפות בכל נקודה):

א.

$$f(x,y)=\begin{cases}y\cdot\frac{\sin x}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

ב.

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin(x\cdot y)}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

. היעזרו בעובדה הבאה: $\forall x: |\sin x| \le |x|$.

<u>פתרון:</u>

א. כאן צריך להשתמש שמכפלת פונקציות רציפות היא רציפה. הפונקציה $f(x,y) = \begin{cases} y & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ רציפה כמובן, וכמו כן הפונקציה $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x\neq 0 \\ 1 & x=0 \end{cases}$ רציפה.

לכן, המכפלה רציפה. המכפלה זה הפוקציה $f(x,y) = \begin{cases} y\cdot\frac{\sin x}{x} & x\neq 0 \\ 0\cdot 1 & x=0 \end{cases}$, ולכן הפונקציה רציפה.

אפשר גם לפי הגדרה. לכל שתי סדרות x_n, y_n נקבל: $|f(x_n,y_n) - f(0,0)| = |y_n \cdot \frac{\sin x_n}{x_n}| = |y_n| \cdot |\frac{\sin x_n}{x_n}|$ וזו מכפלה של סדרות מתכנסות, אחת לאפס ואחת לאחד, ולכן הגבול הוא אפס, כדרוש.

ב. לפי הגדרה צריך להראות שלכל שתי סדרות x_n, y_n מתקיים: $|f(x_n,y_n) - f(0,0)| \to 0$. נראה זאת:

$$|f(x_n,y_n) - f(0,0)| = |\frac{\sin(x_n y_n)}{x_n}| = \frac{|\sin(x_n y_n)|}{|x_n|}$$

עכשיו נשתמש ברמז שכתוב: תמיד מתקיים $|\sin x| \le |x|$, ולכן אצלנו נקבל $|\sin(xy)| \le |xy|$ ונוכל להמשיך:

$$\frac{|\sin(x_n y_n)|}{|x_n|} \le \frac{|x_n y_n|}{|x_n|} = \frac{|x_n| \cdot |y_n|}{|x_n|} = |y_n| \to 0$$

בהצלחה!