פתרון תרגיל בית 1 – גאומטריה אנליטית, זהבית צבי

<u>הערה:</u> בכל התרגיל נשתמש במכפלה הפנימית הסטנדרטית עבור וקטורי עמודה: $\langle v,w\rangle = v^T w$.

<u>שאלה 1</u>: תהי S הקבוצה המורכבת מהווקטורים הבאים ב-$\mathbb{R}^3$:

$$u_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ u_2=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix},\ u_3=\begin{pmatrix}5\\-4\\-1\end{pmatrix}$$

א. הראו כי S היא בסיס אורתוגונלי ל-$\mathbb{R}^3$, כלומר קבוצה אורתוגונלית שהיא גם בסיס ל-$\mathbb{R}^3$.

ב. השתמשו בתוצאה של סעיף א' בכדי לקבל בסיס אורתונורמלי ל-$\mathbb{R}^3$.

פתרון:

א. אנו יודעים כי המימד של $\mathbb{R}^3$ הוא שלוש, כלומר כל קבוצה של שלושה ווקטורים בת"ל היא בסיס למרחב זה.
לכן מספיק להראות כי הווקטורים של הקבוצה S הם בת"ל ובכך יהווה בסיס.
לפי משפט שלמדנו בכיתה: <u>כל קבוצה אורתוגונלית שוקטור האפס לא נמצא בה היא בת"ל</u>. לכן, כיוון שוקטור האפס לא נמצא בקובצה נותר להראות כי S קבוצה אורתוגונלית.
נחשב את המכפלות הפנימיות:

$$\langle u_1,u_2\rangle = 1\cdot1+1\cdot2+1\cdot(-3)=0$$
$$\langle u_1,u_3\rangle = 1\cdot5+1\cdot(-4)+1\cdot(-1)=0$$
$$\langle u_2,u_3\rangle = 1\cdot5+2\cdot(-4)+(-3)\cdot(-1)=0$$

מכאן קיבלנו כי S קבוצה אורתוגונלית וכיוון שוקטור האפס לא נמצא בה אז היא בת"ל.
ולפי הטענה הראשונה היא הסיס אורתוגונלי ל $\mathbb{R}^3$.

ב. מבדיקה ראשונית של וקטור u_1 ניתן לראות כי האורך שלו אינו 1. ולכן ננרמל את כל הוקטורים שאורכם אינו אחד ע"מ לקבל בסיס אורתונורמלי.
נחשב את הנורמה של כל ווקטור:

$$\|u_1\|=\sqrt{\langle u_1,u_1\rangle}=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$$
$$\|u_2\|=\sqrt{\langle u_2,u_2\rangle}=\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2}=\sqrt{14}$$
$$\|u_3\|=\sqrt{\langle u_3,u_3\rangle}=\sqrt{5^2+(-4)^2+(-1)^2}=\sqrt{42}$$

והבסיס האורתונורמלי שנקבל:

$$\widetilde{u_1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix},\ \widetilde{u_2}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{14}}\\\frac{2}{\sqrt{14}}\\-\frac{3}{\sqrt{14}}\end{pmatrix},\ \widetilde{u_3}=\begin{pmatrix}\frac{5}{\sqrt{42}}\\-\frac{4}{\sqrt{42}}\\-\frac{1}{\sqrt{42}}\end{pmatrix}$$

שאלה 2: יהיו $u_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}, u_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix}, u_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}, u_4=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

הראו כי (u_1,u_2,u_3,u_4) זה בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{R}^4$ (מבלי להוכיח בת״ל ופורשת).

פתרון:

נחשב את המכפלות הפנימיות לכל שני וקטורים : $1\le i\ne j\le 4$.

$$\langle u_i,u_j\rangle=2\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\left(\frac{1}{2}\right)^2=0$$

כעת נחשב נורמה לכל וקטור בנפרד ונקבל שהאפשרות היחידה עבור כל הוקטורים היא :

$\|u_i\|=\sqrt{4\cdot\left(\pm\frac{1}{2}\right)^2}=1$ לכל $1\le i\le 4$.

תחילה קיבלנו קבוצה אורתוגונלית בעלת 4 ווקטורים ב- $\mathbb{R}^4$ וכמו כן וקטור האפס לא נמצא בה ולכן הקבוצה בת״ל. כיוון שהמימד של הקבוצה כמימד המרחב(4) נקבל שהיא בסיס אורתוגונלי.
לאחר שחישבנו את הנורמה אנו רואים שהנורמה של כל אחד מהוקטורים היא 1 (שורש של המכפלה הפנימית של כל וקטור עם עצמו) ולכן, סה״כ נקבל בסיס אורתונורמלי ל- $\mathbb{R}^4$. מש״ל.

שאלה 3: חשבו את הדטרמיננטה באמצעות שיטת הדירוג

א. $\begin{vmatrix}1&2&4\\1&1&-2\\2&1&3\end{vmatrix}$ תשובה סופית : 13-

פתרון

נבצע דירוג דטרמיננטה לפי פעולות שורה :

$$\begin{vmatrix}1&2&4\\1&1&-2\\2&1&3\end{vmatrix}\underset{R_3-2R_1\to R_3}{\overset{R_2-R_1\to R_2}{=}}\begin{vmatrix}1&2&4\\0&-1&-6\\0&-3&-5\end{vmatrix}\overset{R_3-3R_2\to R_3}{=}\begin{vmatrix}1&2&4\\0&-1&-6\\0&0&13\end{vmatrix}=1\cdot(-1)\cdot 13=-13$$

בסוף השתמשנו בתכונה של דטרמיננטה של מטריצה משולשית.

ב. $\begin{vmatrix}1&2&-3\\3&-1&-2\\2&1&5\end{vmatrix}$ תשובה סופית : 56-

פתרון

נבצע דירוג של הדטרמיננטה לפי פעולות שורה :

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & -3\\ 3 & -1 & -2\\ 2 & 1 & 5\end{vmatrix} \underset{R_3-2R_1\to R_3}{\overset{R_2-3R_1\to R_2}{=}} \begin{vmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & -7 & 7\\ 0 & -3 & 11\end{vmatrix} \underset{(*)}{=} 7\begin{vmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & -3 & 11\end{vmatrix} \overset{R_3-3R_2\to R_3}{=} 7\begin{vmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 8\end{vmatrix} = 7\cdot 1\cdot(-1)\cdot 8 = -56$$

(*) הוצאת גורם משותף מהשורה השנייה
בסוף משתמשים בתכונה של דטרמיננטה של מטריצה משולשית.